On considère un système de sphères dures qui avec probabilité p s'annihilent, et probabilité $1-p$ subissent un choc élastique, avec trajectoire ballistique entre les collisions. On sait que pour l'annihilation pure, l'équation de Boltzmann devient exacte dans la limite des temps longs, en dimension $d \geq 2$. En effet, l'annihilation implique une densité qui tend vers zéro, d'où les corrélations qui deviennent négligeables. Plus formellement, l'article de Jarek montre que la hiérarchie des fonctions de distributions des particules se réduit dans la limite de Grad et avec l'hypothèse de Chaos moléculaire à l'éq. de Boltzmann. En effet, la dynamique d'annihilation aux temps longs réalise la limite de Grad et le chaos moléculaire. Dans le cas de l'annihilation probabiliste, avec probabilité d'annihilation p, la partie collisionnelle ne vérifie pas ces hypothèses et n'est par conséquent pas correctement décrite par l'équation de Boltzmann (formellement). Par contre, en tenant compte des deux dynamiques, l'annihilation et la collision, il apparaît que aussi longtemps que $p > 0$ il suffit d'attendre suffisamment longtemps pour que la décimation des particules valide les hypothèses menant à l'équation de Boltzmann. Ainsi p apparaît comme un paramètre "perturbatif" autour de l'équation de Boltzmann. Seule la limite $p \to 0^+$ apparaît alors délicate du point de vue théorique et conceptuel, à priori.

On reprend ainsi l'éq. de Boltzmann (25) de l'article Jarek (dans $\mathbb{R}^d$):

$$(\partial_t + v_1 \cdot \partial_{r_1}) f(1;t) = \int d2\, T^{\nu}(1,2) f(1;t) f(2;t) \quad ; \quad d2 = dr_2 dv_2 \; ; \; i = \{r_i, v_i\} \tag{1}$$

avec $T(1,2)$ l'opérateur d'annihilation probabiliste:

$$T^{\nu}(1,2) = p\, T^{\nu}_a(1,2) + (1-p)\, T^{\nu}_c(1,2) \tag{2}$$

$$T^{\nu}_a(1,2) = \sigma^{d-1} \int d\hat\sigma\, (\hat\sigma \cdot \underline{v}_{12})\, \theta(-\hat\sigma \cdot \hat v_{12})\, \delta(r_{12} - \sigma\hat\sigma) \quad ; \; \hat\sigma = \frac{r_{12}}{|r_{12}|} \; ; \; \sigma = \text{diamètre particules} \tag{3}$$

$$T^{\nu}_c(1,2) = -\sigma^{d-1} \int d\hat\sigma\, (\hat\sigma \cdot \underline{v}_{12})\, \theta(-\hat\sigma \cdot \hat v_{12})\, \delta(r_{12} - \sigma\hat\sigma)\, (b^{-1} - 1)$$

$$b^{-1} v_{12} = v_{12} - 2(\underline{v}_{12} \cdot \hat\sigma) \cdot \hat\sigma = b v_{12} \tag{4}$$

$$b^{-1} v_{\frac{1}{2}} = v_{\frac{1}{2}} \mp (v_{\frac{1}{2}} \cdot \hat\sigma) \cdot \hat\sigma = b v_{\frac{1}{2}}$$

avec $T^{\nu}_a(1,2)$ l'opérateur d'annihilation et $T^{\nu}_c(1,2)$ l'opérateur de collision.

(3) et (4) dans (1) donne:

$$(\partial_t + v_1 \partial_{r_1}) f(1;t) = p \cdot \int d2\, T^{\nu}_a(1,2) f(1;t) f(2;t) + (1-p) \int d2\, T^{\nu}_c(1,2) f(1;t) f(2;t)$$

$$= p\, J_a[f,f] + (1-p)\, J_c[f,f] \tag{5}$$

avec:

$$J_c[f,f] = -\int dr_2 \int dv_2\, \sigma^{d-1} \int d\hat\sigma\, (\hat\sigma \cdot \underline{v}_{12})\, \theta(-\hat\sigma \cdot \hat v_{12})\, \delta(r_{12} - \sigma\hat\sigma)\, (b^{-1} - 1)\, f(1;t) f(2;t)$$

$$= -\sigma^{d-1} \int dv_2 \int d\hat\sigma\, (\hat\sigma \cdot \underline{v}_{12})\, \theta(-\hat\sigma \cdot \hat v_{12})\, (b^{-1} - 1)\, f(r_1, v_1; t) \int dr_2\, f(r_2, v_2; t)\, \underline{\delta(r_{12} - \sigma\hat\sigma)}$$

$|r_1 - r_2| = \sigma \longrightarrow 0$ dans la limite de Grad $\Rightarrow r_1 \sim r_2$

$$= \sigma^{d-1} \int dv_2 \int d\hat\sigma\, (\hat\sigma \cdot \underline{v}_{12})\, \theta(\hat\sigma \cdot \hat v_{12})\, (b^{-1} - 1)\, f(r_1, v_1; t)\, f(r_1, v_2; t)$$

$$= \sigma^{d-1} \underbrace{\int d\hat\sigma\, (\hat\sigma \cdot \hat v_{12})\, \theta(\hat\sigma \cdot \hat v_{12})}_{:= \beta_1} \int dv_2\, |v_{12}|\, (b^{-1} - 1)\, f(r_1, v_1; t)\, f(r_1, v_2; t)$$

$$= \sigma^{d-1} \beta_1 \int dv_2\, |v_{12}|\, (b^{-1} - 1)\, f(r_1, v_1; t)\, f(r_1, v_2; t) \quad ; \quad \beta_n = \int d\hat\sigma\, (\hat\sigma \cdot \hat v_{12})^n\, \theta(\hat\sigma \cdot \hat v_{12}) = \pi^{\frac{d-1}{2}}\, \Gamma\!\left(\tfrac{n+1}{2}\right) / \Gamma\!\left(\tfrac{n+d}{2}\right) \tag{6}$$

$$J_a[f,f] = \int dr_2 \int dv_2\, \sigma^{d-1} \int d\hat\sigma\, (\hat\sigma \cdot \underline{v}_{12})\, \theta(-\hat\sigma \cdot \hat v_{12})\, \delta(r_{12} - \sigma\hat\sigma)\, f(1;t) f(2;t)$$

$$= -\sigma^{d-1} \int dv_2 \int d\hat\sigma\, (\hat\sigma \cdot \underline{v}_{12})\, \theta(\hat\sigma \cdot \hat v_{12})\, f(r_1, v_1; t) \int dr_2\, f(r_2, v_2; t)\, \underbrace{\delta(r_{12} - \sigma\hat\sigma)}_{\text{idem: dans la limite de grad} \Rightarrow r_1 = r_2}$$

$$= -\sigma^{d-1} \underbrace{\int d\hat\sigma\, (\hat\sigma \cdot \hat v_{12})\, \theta(\hat\sigma \cdot \hat v_{12})}_{= \beta_1} \int dv_2\, |v_{12}|\, f(r_1, v_1; t)\, f(r_1, v_2; t)$$

$$= -\underbrace{\sigma^{d-1} \beta_1 \int dv_2\, |v_{12}|\, f(r_1, v_2; t)}_{:= \nu(r_1, v_1; t)}\, f(r_1, v_1; t)$$

$$= -\nu(r_1, v_1; t)\, f(r_1, v_1; t) \tag{7}$$

$\nu(\ldots)$ est la fréquence de collision généralisée (i.e. il y a une dépendance spatiale). Lois de "conservation": invariants de collision: on établit les invariants de collisions par intégration de l'équation de boltzmann sur les différents moments des vitesses v^0, v^1, v^2. Comme $T^{\nu}_c(1,2)$ décrit des collisions élastiques (on pose dès le départ le coefficient de restitution égal à 1), les intégrations sur $T^{\nu}_c(1,2)$ seront nulles. Seule l'annihilation décrite par $T^{\nu}_a(1,2)$ donnera des contributions non nulles, i.e. des grandeurs non conservées. Ainsi, définissons:

$$\int dv_1\, v_1^0\, J_a[f,f] = -\int dv_1\, \nu(r_1, v_1; t)\, f(r_1, v_1; t) := -\omega[f,f] \tag{8}$$

$$\int dv_1\, m v_1^1\, J_a[f,f] = -\int dv_1\, m v_1\, \nu(r_1, v_1; t)\, f(r_1, v_1; t) = -m\, \omega[f, v_1 f] \tag{9}$$

$$\int dv_1\, \tfrac{1}{2} m v_1^2\, J_a[f,f] = -\tfrac{1}{2} m \int dv_1\, v_1^2\, \nu(r_1, v_1; t)\, f(r_1, v_1; t) = -\tfrac{1}{2} m\, \omega[f, v_1^2 f] \tag{10}$$

où on a noté:

$$\omega[f,g] := \int dv_1\, \nu(r_1, v_1; t)\, g(r_1, v_1; t) \quad ; \quad \nu(r_1, v_1; t) = \sigma^{d-1} \beta_1 \int dv_2\, |v_{12}|\, f(r_1, v_2; t) \tag{11}$$

les lois de "conservation" s'obtiennent par intégration de l'éqn. de Boltzmann, avec poids approprié. Pour ceci, introduisons d'abord les grandeurs:

$n(r,t) = \int dv\, f(r,v;t)$: densité de particules

$n(r,t)\, \underline{u}(r,t) = \int dv\, \underline{v}\, f(r,v;t) \Rightarrow \underline{u}(r,t) = \frac{1}{n(r,t)} \int dv\, \underline{v}\, f(r,v;t)$: champ de vitesse

$\frac{d}{2} n(r,t) k_B T(r,t) = \int dv\, \frac{1}{2} m V^2 f(r,v;t) \Rightarrow T(r,t) = \frac{m}{n(r,t)\, k_B\, d} \int dv\, V^2 f(r,v;t)$: température granulaire

Ainsi: de (5):

1) <u>Masse:</u>

$$\int dv_1\, (\partial_t + v_1 \cdot \partial_{r_1}) f(r_1, v_1, t) = \underbrace{p \int dv_1\, J_a[f,f]}_{\overset{(8)}{=} -\omega[f,f]} + (1-p) \underbrace{\int dv_1\, J_c[f,f]}_{= 0}$$

$$\Rightarrow \partial_t \underbrace{\int dv_1\, f(r_1, v_1, t)}_{= n(r_1, t)} + \nabla_{r_1} \cdot \underbrace{\int dv_1\, v_1\, f(r_1, v_1, t)}_{= n(r_1,t)\, u(r_1,t)} = -p\, \omega[f,f]$$

$$\Rightarrow \partial_t n(r_1,t) + (\nabla_{r_1} n(r_1,t)) \cdot u(r_1,t) + n(r_1,t)\, \nabla_{r_1} u(r_1,t) = -p\, \omega[f,f]$$

$$\Rightarrow (\partial_t + u(r_1,t) \cdot \nabla_{r_1})\, n(r_1,t) + n(r_1,t)\, \nabla_{r_1} u(r_1,t) = -p\, \omega[f,f]$$

$$\Rightarrow \boxed{D_t n(r_1,t) + n(r_1,t)\nabla_{r_1} u(r_1,t) = -p\,\omega[f,f]} \quad ; \; D_t = \partial_t + u(r_1,t)\cdot\nabla_{r_1} \tag{12}$$

2) Impulsion :

$$\int dv_1 m v_1 (\partial_t + v_1\cdot\nabla_{r_1}) f(r_1,v_1,t) = p\underbrace{\int dv_1 m v_1 J_a[f,f]}_{\overset{(9)}{=} -m\,\omega[f,v_1 f]} + (1-p)\underbrace{\int dv_1 m v_1 J_c[f,f]}_{=0}$$

On allège les notations et écrit la loi de conservation pour la composante i : $\underline{v_1} \to v_i$, ainsi :

$$\cancel{m}\int dv\, v_i(\partial_t + v_j\nabla_j) f = -p\,\cancel{m}\,\omega[f,v_i f]$$

$$\Rightarrow \partial_t \underbrace{\int dv\, v_i f}_{=n u_i} + \underbrace{\int dv\, v_i v_j \nabla_j f}_{=\nabla_j \int dv\, v_i v_j f} = -p\,\omega[f,v_i f]$$

$$\Rightarrow \partial_t(n u_i) + \nabla_j \int dv\, v_i v_j f = -p\,\omega[f,v_i f]$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n}\underbrace{\partial_t(n u_i)}_{=u_i\partial_t n + n\partial_t u_i} + \frac{1}{n}\nabla_j\int dv\, v_i v_j f = -p\,\frac{1}{n}\,\omega[f,v_i f]$$

$$\Rightarrow u_i \underbrace{\frac{\partial_t n}{n}}_{\overset{(12)}{=}\frac{1}{n}\left[-p\omega[f,f] - u_j\nabla_j n - n\nabla_j u_j\right]} + \partial_t u_i + \frac{1}{n}\nabla_j\int dv\, v_i v_j f = -p\,\frac{1}{n}\,\omega[f,v_i f]$$

$$\Rightarrow \partial_t u_i + \frac{1}{n}\nabla_j\int dv\, v_i v_j f - \frac{1}{n}\left(u_i u_j \nabla_j n + n\, u_i \nabla_j u_j\right) = p\,\frac{1}{n}\Big(\underbrace{u_i\,\omega[f,f] - \omega[f,v_i f]}\Big) \tag{13}$$

$$= \omega[f,u_i f] - \omega[f,v_i f]$$
$$= -\,\omega[f,(v_i - u_i) f]$$
$$\overset{V=v-u}{=} -\,\omega[f,V_i f]$$

Introduisons le tenseur de pression. Soit $\beta = 1/k_B T(r,t)$, alors le tenseur de pression P_{ij} est défini par :

$$P_{ij} = m\int dv\, V_i V_j\, f(r,v,t) \tag{14}$$

On peut décomposer le tenseur de pression en une partie de trace nulle et une autre purement diagonale :

$$P_{ij} = \int dv\, f(r,v,t)\, \underbrace{m\left(V_i V_j - \frac{V^2}{d}\delta_{ij}\right)}_{:= D_{ij}(V)} + \underbrace{\int dv\, f(r,v,t)\,\frac{m}{d} V^2 \delta_{ij}}_{= n k_B \underbrace{\frac{m}{k_B d}\frac{1}{n}\int dv\, V^2 f}_{=T}\,\delta_{ij}}$$

$$= \int dv\, f(r,v,t)\, D_{ij}(V) + \frac{n}{\beta}\delta_{ij} \qquad\qquad = n/\beta\,\delta_{ij} \tag{15}$$

En particulier, nous avons besoin de reformuler la définition générale (14) pour l'inclure dans (13) :

$$P_{ij} = m\int dv\,(v_i - u_i)(v_j - u_j) f = m\int dv\, v_i v_j f + m\underbrace{\int dv\, u_i u_j f}_{=n u_i u_j} - m\underbrace{\int dv\, v_i u_j f}_{=n u_i u_j} - m\underbrace{\int dv\, u_i v_j f}_{=n u_j u_i}$$

$$= m\int dv\, v_i v_j f - m\, n\, u_i u_j$$

$$\Rightarrow \frac{1}{mn}\nabla_j P_{ij} = \frac{1}{n}\nabla_j\int dv\, v_i v_j f - \frac{1}{n}\nabla_j\, n u_i u_j$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n}\nabla_j\int dv\, v_i v_j f = \frac{1}{mn}\nabla_j P_{ij} + \frac{1}{n}\nabla_j\, n u_i u_j \tag{16}$$

(16) dans (13) $\Rightarrow$

$$\partial_t u_i + \frac{1}{mn}\nabla_j P_{ij} + \frac{1}{n}\Big(\underbrace{\nabla_j\, n u_i u_j}_{= u_i u_j \nabla_j n + n u_j \nabla_j u_i + n u_i \nabla_j u_j} - u_i u_j \nabla_j n - n u_i \nabla_j u_j\Big) = -p\,\frac{1}{n}\,\omega[f,V_i f]$$

$$\Rightarrow \boxed{\partial_t u_i + \frac{1}{mn}\nabla_j P_{ij} + u_j\nabla_j u_i = -p\,\frac{1}{n}\,\omega[f,V_i f]} \quad , i = 1,\dots,3. \tag{17}$$

3) Energie :

$$\underbrace{\int dv\,\tfrac{1}{2} m v^2(\partial_t + v_j\nabla_j) f}_{=\frac{1}{2}m\underbrace{\int dv\, v^2 \partial_t f}_{=\partial_t\int dv\, v^2 f} + \frac{1}{2}m\underbrace{\int dv\, v^2 v_j\nabla_j f}_{=\nabla_j\int dv\, v^2 v_j f}} = p\underbrace{\int dv\,\tfrac{1}{2} m v^2 J_a[f,f]}_{= -\frac{1}{2}m\,\omega[f,v^2 f]} + (1-p)\underbrace{\int dv\,\tfrac{1}{2} m v^2 J_c[f,f]}_{=0}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n}\partial_t\int dv\, v^2 f + \frac{1}{n}\nabla_j\int dv\, v^2 v_j f = -p\,\frac{1}{n}\,\omega[f,v^2 f] \tag{18}$$

Pour continuer, on introduit d'abord le courant de chaleur q, défini par :

$$q_i(r,t) = \frac{m}{2}\int dv\, V^2 V_i\, f(r,v,t) = \int dv\,\underbrace{\left(\frac{m}{2}V^2 - \frac{d+2}{2}T\right)V_i}_{:= S_i(V)} f(r,v,t) = \int dv\, S_i(V)\, f(r,v,t) \tag{19}$$

en effet, on peut ajouter un terme arbitraire dont la contribution est nulle car :

$$-\frac{d+2}{2}T\int dv\, V_i\, f(r,v,t) = -\frac{d+2}{2}T\Big\{\underbrace{\int dv\, v_i f(r,v,t)}_{=n u_i} - \underbrace{\int dv\, u_i f(r,v,t)}_{=u_i n}\Big\} = 0$$

Ainsi on va utiliser la relation :

$$\nabla_j q_j = \nabla_j\int dv\, S_j(V) f = \nabla_j\int dv\,\frac{m}{2}V^2 V_j f$$
$$= \frac{m}{2}\nabla_j\int dv\,(v_j - u_j)(v-u)^2 f$$
$$= \frac{m}{2}\nabla_j\Big\{\int dv\, f(v_j - u_j)v^2 + \int dv\, f(v_j - u_j)u^2 - 2\int dv\, f(v_j - u_j)v_k u_k\Big\}$$

$$= \frac{m}{2}\nabla_j \Big\{ \int dv\, f\, v_j v^2 - \int dv f\, u_j v^2 + \underbrace{\int dv f v_j u^2}_{=u^2 n u_j} - \underbrace{\int dv f u_j u^2}_{=u^2 n u_j} - 2\int dv f v_j v_k u_k + 2\underbrace{\int dv f u_j v_k u_k}_{=u_j u_k n u_k = n u_j u^2} \Big\}$$

$$= \frac{m}{2}\nabla_j \Big\{ \int dv f v_j v^2 - u_j \int dv f v^2 - 2 u_k \int dv f v_j v_k + 2n u_j u^2 \Big\}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{mn}\nabla_j q_j = \frac{1}{n}\nabla_j \int dv f v_j v^2 - \frac{1}{n}\nabla_j u_j \int dv f v^2 - \frac{2}{n}\nabla_j u_k \int dv f v_j v_k + \frac{2}{n}\nabla_j n u_j u^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n}\nabla_j \int dv f v_j v^2 = \frac{2}{mn}\nabla_j q_j + \frac{1}{n}\nabla_j u_j \int dv f v^2 + \underbrace{\frac{2}{n}\nabla_j u_k \int dv f v_j v_k}_{} - \frac{2}{n}\nabla_j n u_j u^2$$

$$= \underbrace{\frac{2}{n}(\nabla_j u_k)\int dv f v_j v_k}_{} + \frac{2}{n} u_k \nabla_j \int dv f v_j v_k$$

$$= 2(\nabla_j u_k)\underbrace{\frac{1}{n}\int dv f v_j v_k}_{}$$

$$= \frac{1}{mn}P_{jk} + \frac{1}{n} n u_j u_k$$

$$= \frac{2}{mn}\nabla_j q_j + \frac{1}{n}\nabla_j u_j \int dv f v^2 - \frac{2}{n}\nabla_j n u_j u^2 + 2u_k \frac{1}{n}\nabla_j \int dv f v_j v_k + \frac{2}{mn}\underbrace{(\nabla_j u_k)P_{jk}}_{:= P:\nabla u} + \underbrace{2 u_j u_k \nabla_j u_k}_{= u_j \nabla_j u^2}$$

$$= \frac{2}{mn}\left(P:\nabla u + \nabla_j q_j\right) + \frac{1}{n}\nabla_j u_j \int dv f v^2 - \frac{2}{n}\nabla_j n u_j u^2 + 2u_k \underbrace{\frac{1}{n}\nabla_j \int dv f v_j v_k}_{= \frac{1}{mn}\nabla_j P_{kj} + \frac{1}{n}\nabla_j n u_j u_k} + u_j \nabla_j u^2$$

$$= \frac{2}{mn}\left(P:\nabla u + \nabla_j q_j\right) + \frac{1}{n}\nabla_j u_j \int dv f v^2 - \frac{2}{n}\nabla_j n u_j u^2 + u_j \nabla_j u^2 + \frac{2}{mn} u_k \nabla_j P_{kj} + \frac{2}{n} u_k \nabla_j n u_j u_k \qquad (20)$$

D'autre part, on a aussi la relation :

$$\partial_t T = \partial_t \frac{m}{nkd}\underbrace{\int dv\, V^2 f}_{}$$

$$= \underbrace{\int dv\, u^2 f}_{=u^2 n} + \int dv\, v^2 f \underbrace{-2\int dv\, v_j u_j f}_{=-2u_j n u_j = -2nu^2}$$

$$= \frac{m}{kd}\partial_t \left(\frac{1}{n}\int dv\, v^2 f - u^2 \right)$$

$$= \frac{m}{kd}\left(-\frac{1}{n^2}\right)(\partial_t n)\int dv\, v^2 f + \frac{m}{nkd}\partial_t \int dv\, v^2 f - \frac{m}{kd} 2u_j \partial_t u_j$$

$$\Rightarrow \frac{m}{kd}\frac{1}{n}\partial_t \int dv\, v^2 f = \partial_t T + \frac{m}{kd}\frac{1}{n^2}\underbrace{(\partial_t n)}_{\text{éq. (12)}}\int dv\, v^2 f + \frac{m}{kd}2u_j \underbrace{\partial_t u_j}_{\text{éq. (17)}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n}\partial_t \int dv\, v^2 f = \frac{kd}{m}\partial_t T + \frac{1}{n^2}\int dv\, v^2 f \cdot \Big\{ -p\omega[f,f] - u_j \nabla_j n - n\nabla_j u_j \Big\} + 2u_j \Big\{ -\frac{1}{mn}\nabla_k P_{jk} - u_k \nabla_k u_j - p\frac{1}{n}\omega[f, \nabla_j f] \Big\}$$

$$= \frac{kd}{m}\partial_t T - \frac{1}{n^2}\left(p\omega[f,f] + u_j \nabla_j n + n\nabla_j u_j \right)\int dv\, v^2 f - 2\left(\frac{1}{mn} u_j \nabla_k P_{jk} + u_j u_k \nabla_k u_j + p\frac{1}{n}\omega[f, u_j \nabla_j f] \right) \qquad (21)$$

Met tout ensemble : (20), (21) dans (18) donne :

$$\frac{kd}{m}\partial_t T - \frac{1}{n^2}\left(p\omega[f,f] + u_j \nabla_j n + n\nabla_j u_j \right)\int dv\, v^2 f - \frac{2}{mn} u_j \nabla_k P_{jk} - 2u_j u_k \nabla_k u_j - 2p\frac{1}{n}\omega[f, u_j \nabla_j f]$$
$$+ \frac{2}{mn}\left(P:\nabla u + \nabla_j q_j\right) + \frac{1}{n}\nabla_j u_j \int dv f v^2 - \frac{2}{n}\nabla_j n u_j u^2 + u_j \nabla_j u^2 + \frac{2}{mn} u_k \nabla_j P_{kj} + \frac{2}{n} u_k \nabla_j n u_j u_k = -p\frac{1}{n}\omega[f, v^2 f]$$

$$\Rightarrow \frac{kd}{m}\partial_t T + \frac{2}{mn}\left(P:\nabla u + \nabla_j q_j\right) - \frac{1}{n^2}p\omega[f,f]\int dv\, v^2 f - 2p\frac{1}{n}\omega[f, u_j \nabla_j f] - \frac{1}{n^2}u_j(\nabla_j n)\int dv f v^2 - \frac{1}{n}(\nabla_j u_j)\int dv f v^2$$
$$-2u_j u_k \nabla_k u_j - \frac{2}{n}\underbrace{\nabla_j n u_j u^2}_{\substack{= u_j u_k u_k \nabla_j n \\ + n u_k u_k \nabla_j u_j \\ + 2n u_j u_k \nabla_j u_k}} + \underbrace{u_j \nabla_j u^2}_{= 2u_j u_k \nabla_j u_k} + \frac{2}{n} u_k \underbrace{\nabla_j n u_j u_k}_{\substack{= u_j u_k \nabla_j n \\ + n u_k \nabla_j u_j \\ + n u_j \nabla_j u_k}} + \frac{1}{n}\nabla_j u_j \int dv f v^2 = -p\frac{1}{n}\omega[f, v^2 f]$$

$$\Rightarrow \frac{kd}{m}\partial_t T + \frac{2}{mn}\left(P:\nabla u + \nabla_j q_j\right) - \frac{1}{n^2}u_j(\nabla_j n)\int dv\, v^2 f - \frac{1}{n}(\nabla_j u_j)\int dv f v^2 + \frac{1}{n}(\nabla_j u_j)\int dv\, v^2 f + \frac{1}{n}u_j \nabla_j \int dv\, v^2 f$$
$$-2u_j u_k \nabla_k u_j - \frac{2}{n}u_j u_k u_k \nabla_j n - 2u_k u_k \nabla_j u_j - 4u_j u_k \nabla_j u_k$$
$$+2u_j u_k \nabla_j u_k + \frac{2}{n}u_k u_j u_k \nabla_j n + 2u_k u_k \nabla_j u_j + 2u_k u_j \nabla_j u_k$$

$$= \underbrace{\frac{1}{n^2}p\omega[f,f]\int dv\, v^2 f}_{} - p\frac{1}{n}\omega[f, (v^2 - 2u_j v_j)f]$$

$$= p\frac{1}{n}\omega[f,f]\frac{kd}{m}\frac{m}{nkd}\left(\int dv\, V^2 f - \underbrace{\int dv\, u^2 f}_{=nu^2} + 2\underbrace{\int dv\, v_j u_j f}_{=2nu^2} \right)$$

$$= p\frac{1}{n}\omega[f,f]\frac{kd}{m}\left(\underbrace{\frac{m}{nkd}\int dv\, V^2 f}_{=T} + \frac{m}{kdn} n u^2 \right)$$

$$\Rightarrow \partial_t T + \frac{2}{nkd}\left(P:\nabla u + \nabla_j q_j\right) + \frac{m}{kd}\Big\{ -\frac{1}{n^2}u_j(\nabla_j n)\int dv\, v^2 f + \frac{1}{n}u_j \nabla_j \int dv\, v^2 f - 2u_j u_k \nabla_j u_k \Big\}$$
$$= p\frac{1}{n}\omega[f,f]\left(T + \frac{m}{kd}u^2\right) - p\frac{1}{n}\frac{m}{kd}\omega[f, (v^2 - 2u_j v_j)f] \qquad (22)$$

On remarque aussi qu'on a :

$$u_j \nabla_j T = u_j \nabla_j \frac{m}{nkd}\underbrace{\int dv\, V^2 f}_{}$$

$$= \int dv\, v^2 f + \int dv\, u^2 f - 2\int dv\, v_k u_k f = \int dv\, v^2 f + n u_k u_k - 2n u_k u_k$$

$$\Longrightarrow u_j\nabla_j T = u_j\nabla_j \frac{m}{nkd}\left(\int dv\, v^2 f - n u_k u_k\right)$$
$$= \frac{m}{kd}\left\{ u_j\nabla_j \frac{1}{n}\int dv\, v^2 f - u_j\nabla_j u_k u_k\right\}$$
$$= \frac{m}{kd}\left\{ -\frac{1}{n^2} u_j(\nabla_j n)\int dv\, v^2 f + \frac{1}{n} u_j\nabla_j\int dv\, v^2 f - 2 u_j u_k \nabla_j u_k\right\} \qquad (23)$$

Ainsi on remarque que le terme de (21) qui est entre $\{\cdots\}$ est le même que (23), donc on a :

$$\partial_t T + \frac{2}{nkd}\left(P:\nabla u + \nabla_j q_j\right) + u_j\nabla_j T = p\frac{1}{n}\omega[f,f]\left(T + \frac{m}{kd}u^2\right) - p\frac{1}{n}\frac{m}{kd}\omega\left[f, (v^2 - 2u_j v_j) f\right] \qquad (24)$$

En utilisant :

$$-u^2 + v^2 - 2u_j v_j = ~~v^2 - u_j(v_j - u_j) = V^2 + u^2 - u_j v_j = (v_j - u_j)(v_j - u_j) + v_j u_j = V^2 + v_j u_j~~ \quad V^2$$

on a finalement :

$$\boxed{\partial_t T + u_j\nabla_j T + \frac{2}{nkd}\left(P:\nabla u + \nabla_j q_j\right) = p\frac{1}{n}\omega[f,f]\left(T + ~~\frac{m}{kd}u^2~~\right) - p\frac{1}{n}\frac{m}{kd}\omega\left[f, (V^2 ~~+ v_j u_j~~) f\right]} \qquad (25)$$

<u>Chapman-Enskog:</u> pour appliquer la méthode de Chapman-Enskog, on doit d'abord faire deux hypothèses raisonnables. La première est que la dépendance spatiale et temporelle de la fonction de distribution $f(r,v,t)$ peut être exprimée univoquement en fonction des champs hydrodynamiques $n(r,t)$, $u(r,t)$, $T(r,t)$:

$$f(r,v,t) = f\left[v, n(r,t), u(r,t), T(r,t)\right] \qquad (26)$$

Cela revient à dire que l'évolution de la fonction de distribution est complètement déterminée par l'évolution de ses premiers moments $v^0, \underline{v}^1, v^2$. Une telle solution est appelée solution normale. La seconde hypothèse se base sur l'existence (supposée) de deux (au moins) échelles de temps distinctes. L'échelle microscopique est caractérisée par le temps moyen de collision et le libre parcours moyen. L'échelle macroscopique est caractérisée par un temps caractéristique d'évolution des champs hydrodynamiques et de la taille de leurs inhomogénéités. La grande différence entre ces deux échelles de temps implique que sur un temps microscopique les champs hydrodynamiques ne varient que peu. Ainsi ces champs ne sont, sur de telles échelles temporelles et spatiales, que très faiblement inhomogènes. Ceci permet de réaliser un développement en ordre des gradients des champs, i.e. d'appliquer la méthode de Chapman-Enskog. Ceci permet de réaliser un développement en gradients de la fonction de distribution:

$$f = f^{(0)} + \lambda f^{(1)} + \lambda^2 f^{(2)} + \ldots = \sum_{i\geq 0}\lambda^i f^{(i)}, \qquad (27)$$

où chaque puissance i du paramètre λ correspond à l'ordre i dans le gradient spatial. Ce paramètre λ n'a donc qu'une présence <u>formelle</u> dans ce développement, et signifie que le terme qu'il multiplie est de l'ordre d'un gradient à la puissance i. La méthode de Chapman-Enskog suppose l'existence d'une hiérarchie d'échelles de temps, et donc d'une hiérarchie de dérivées temporelles :

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial^{(0)}}{\partial t} + \lambda\frac{\partial^{(1)}}{\partial t} + \lambda^2\frac{\partial^{(2)}}{\partial t} + \ldots = \sum_{i\geq 0}\lambda^i\frac{\partial^{(i)}}{\partial t}, \qquad (28)$$

où l'ordre i dans la hiérarchie temporelle correspond au même ordre dans le gradient spatial. Ainsi, plus l'ordre est élevé dans le gradient spatial, plus la variation temporelle correspondante est lente. Ceci est bien consistant avec ce qui a été affirmé précédemment. Par exemple pour l'état homogène de déclin libre (c'est l'ordre 0, $f^{(0)}$), la variation temporelle est très grande ce qui signifie que cet ordre du développement capture les phénomènes sur des échelles de temps tellement petites que l'état hydrodynamique (donc macroscopique) n'a pas le temps d'être modifié, d'où l'homogénéité locale. Ainsi $f^{(0)}$ correspond à l'ordre zéro dans les gradients, c'est-à-dire à la solution homogène. On connaît cette solution, c'est la solution homogène du déclin libre ("homogeneous cooling state") trouvée dans le contexte du calcul du a_2 de l'annihilation probabiliste. En effet, en remplaçant les développements (27) et (28) dans l'équation de Boltzmann (5), avec (6) et (7), on a:

$$\left(\partial_t^{(0)} + \lambda\partial_t^{(1)} + \ldots\right)\left(f^{(0)} + \lambda f^{(1)} + \ldots\right) = p\, J_a\left[f^{(0)} + \lambda f^{(1)} + \ldots, f^{(0)} + \lambda f^{(1)} + \ldots\right] + (1-p)\, J_c\left[f^{(0)} + \lambda f^{(1)} + \ldots, f^{(0)} + \lambda f^{(1)} + \ldots\right] \qquad (29)$$

et collecte les termes de même ordre. En particulier, à l'ordre le plus bas :

$$\partial_t^{(0)} f^{(0)} = p\, J_a\left[f^{(0)}, f^{(0)}\right] + (1-p)\, J_c\left[f^{(0)}, f^{(0)}\right] \qquad (30)$$

ce qui est bien l'équation que nous avions résolue dans le contexte du développement de Sonine. On a trouvé :

$$f^{(0)}(r,v,t) = \frac{n(r,t)}{V_T(r,t)^d}\tilde{f}(c) = \frac{n(r,t)}{V_T(r,t)^d}\mathcal{M}(c)\left(1 + a_2 S_2(c^2)\right), \qquad (31)$$

où la vitesse thermique $V_T(r,t)$ est définie par la relation

$$\frac{d}{2}nk_B T = \frac{d}{2}n\left(\frac{1}{2}mV_T^2\right)$$
$$\Longrightarrow V_T = \sqrt{\frac{2}{m\beta}}\ ;\ \beta = \frac{1}{k_B T(r,t)}, \qquad (32)$$

et aussi :

$$\begin{cases} \mathcal{M}(c) = 1/\pi^{d/2}\, e^{-c^2} \\ S_2(x) = \frac{d}{4}x^2 - \frac{d+2}{2}x + \frac{d(d+2)}{8} \\ a_2 = -8\,\dfrac{3-2\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 6 - 4d - \frac{1-p}{p}\sqrt{2}\,8(d-1)} \\ c = \dfrac{v - u(r,t)}{V_T} = \dfrac{V}{V_T} \end{cases} \qquad (33)$$

Quelques commentaires sont nécessaires. La solution $f^{(0)}(r,v,t)$ trouvée dans le contexte de l'annihilation probabiliste était homogène. Or maintenant, comme on le voit de (31) la solution

$$f^{(0)}(r,v,t) = f^{(0)}\left(V, n(r,t), u(r,t), T(r,t)\right) \qquad (34)$$

n'est à priori plus homogène à cause de la dépendance fonctionnelle dans les champs hydrodynamiques, qui eux sont hors-équilibre donc non-homogènes, et dépendent du temps, par définition de la méthode de Chapman-Enskog. Ceci signifie que cette méthode fournit une expansion autour de l'état <u>localement homogène</u>. Ainsi, on remplace de même la vitesse rescalée $c = v/V_T$ obtenue dans le travail sur l'annihilation probabiliste, par la vitesse rescalée autour de la vitesse moyenne : $c = (v-u)/V_T$. Il s'agit bien de la définition correcte de c car on a alors $\langle c\rangle = 0$, pour ne prendre en considération que les fluctuations autour de l'équilibre local. La méthode consiste à résoudre itérativement l'équation de Boltzmann, faisant usage de la solution à l'ordre précédent pour trouver celle à l'ordre suivant.

<u>Ordre 0:</u>

Comme $f^{(0)}(V)$ est isotrope, alors des définitions du tenseur de pression et du courant de chaleur on a :

$$P_{ij}^{(0)} = \underbrace{m\int_{\mathbb{R}^d} dv\left(V_iV_j - \frac{V^2}{d}\delta_{ij}\right)f(V)}_{=0 \text{ car: } i\neq j\text{: symétrie}} + \frac{n}{\beta}\delta_{ij} = \underbrace{nk_BT}_{:=\, p^{(0)}}\delta_{ij} \qquad (35)$$

$$q_i(r,t) = \int_{\mathbb{R}^d} dv\left(\frac{m}{2}V^2 - \frac{d+2}{2}T\right)V_i f(V) = 0 \quad \forall i = 1,\ldots,d. \qquad (36)$$

En effet il y a nullité des intégrations car on intègre une fonction antisymétrique sur un domaine symétrique. $p^{(0)}(r,t) = n(r,t)k_BT(r,t)$ est la pression hydrostatique. Eqn. hydro. à cet ordre : $\partial_t^{(0)} n = -p\omega[f^{(0)}, f^{(0)}]$; $\partial_t^{(0)} u_i = -p\frac{1}{n}\omega[f^{(0)}, V_i f^{(0)}]$; $\partial_t^{(0)} T = p\frac{1}{n}\omega[f^{(0)}, f^{(0)}]\left(T + \frac{2m}{kd}u^2\right) - p\frac{m}{nkd}\omega[f^{(0)}, (V^2 + v_j u_j) f^{(0)}]$.

<u>Ordre 1</u> : on collecte les termes d'ordre 1 en les gradients dans l'équation de Boltzmann (29)

$$\partial_t^{(0)} f^{(1)} + \partial_t^{(1)} f^{(0)} + V_1 \nabla_{r_1} f^{(0)} = p J_a[f^{(0)}, f^{(1)}] + p J_a[f^{(1)}, f^{(0)}] + (1-p) J_c[f^{(0)}, f^{(1)}] + (1-p) J_c[f^{(1)}, f^{(0)}] \quad (37)$$

Soit:

$$(L f^{(1)})(r_1, V_1; t) = -p J_a[f^{(0)}, f^{(1)}] - p J_a[f^{(1)}, f^{(0)}] - (1-p) J_c[f^{(0)}, f^{(1)}] - (1-p) J_c[f^{(1)}, f^{(0)}] \quad (38)$$

alors l'équation de Boltzmann s'écrit:

$$(\partial_t^{(0)} + L) f^{(1)} = -(\partial_t^{(1)} + V_1 \nabla_{r_1}) f^{(0)} \quad (39)$$

Le membre de droite de (39) est connu et peut être calculé car $f^{(0)}$ a été déterminé. Néanmoins, il faut réaliser ce calcul de façon judicieuse. En effet, on sait aussi que $f^{(1)}$ est d'ordre 1 dans les gradients, i.e. on sait que la solution normale pour $f^{(1)}$ doit être de la forme

$$f^{(1)} = \alpha_i \nabla_i T + \beta_i \nabla_i n + \gamma_{ij} \nabla_j u_i \quad (40)$$

Ainsi le but est de reformuler le membre de droite de (39) pour faire apparaître de façon explicite les gradients. En égalant les coefficients de ces gradients on obtient alors un ensemble d'équations pour α_i, β_i, et γ_{ij}. Pour simplifier le membre de droite de (39), il est nécessaire d'utiliser les équations hydrodynamiques à l'ordre 1. De (37) on a:

Masse:

$$\partial_t^{(1)} n + u_i \nabla_i n + n \nabla_i u_i = -p\,\omega[f^{(0)}, f^{(1)}] - p\,\omega[f^{(1)}, f^{(0)}] \quad (41)$$

Or:

$$\begin{aligned} \omega[f,g] &\overset{(38)}{=} \int_{\mathbb{R}^d} dv_1 \int_{\mathbb{R}^d} dv_2\, |v_1 - v_2|\, f(v_2) g(v_1) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} dv_1 \int_{\mathbb{R}^d} dv_2\, |v_2 - v_1|\, f(v_2) g(v_1) \\ &\underset{v_2 = v_1}{\overset{v_1 = v_2}{=}} \int_{\mathbb{R}^d} dv_1 \int_{\mathbb{R}^d} dv_1\, |v_1 - v_2|\, g(v_2) f(v_1) \\ &= \omega[g, f] \end{aligned} \quad (42)$$

Ainsi (42) dans (41) donne:

$$\partial_t^{(1)} n + u_i \nabla_i n + n \nabla_i u_i = -2p\,\omega[f^{(0)}, f^{(1)}]$$

• Impulsion:

$$\partial_t^{(1)} u_i + \frac{1}{mn} \nabla_j P_{ij} + u_j \nabla_j u_i = p \frac{1}{n} \omega[f^{(0)}, V_i f^{(1)}] + p \frac{1}{n} \omega[f^{(1)}, V_i f^{(0)}] \quad (43)$$

Or dans cette dernière expression chaque terme sommé est d'ordre 1 dans les gradients. Ceci implique que le tenseur de pression est celui trouvé à l'ordre 0, i.e. $P_{ij} = P_{ij}^{(0)} = p^{(0)} \delta_{ij}$, et donc:

$$\partial_t^{(1)} u_i + \frac{1}{mn} \nabla_i p^{(0)} + u_j \nabla_j u_i = p \frac{1}{n} \omega[f^{(0)}, V_i f^{(1)}] + p \frac{1}{n} \omega[f^{(1)}, V_i f^{(0)}] \quad (44)$$

• Energie:

$$\partial_t^{(1)} T + u_i \nabla_i T + \frac{2}{nkd}(P : \nabla u + \nabla_j q_j) \overset{(42)}{=} p \frac{2}{n} \omega[f^{(0)}, f^{(1)}] \left(T + \cancel{\tfrac{2m}{kd} u^2}\right) - p \frac{m}{nkd} \omega[f^{(0)}, (V^2 + \cancel{V_j u_j}) f^{(1)}] - p \frac{m}{nkd} \omega[f^{(1)}, (V^2 + \cancel{V_j u_j}) f^{(0)}] \quad (45)$$

A nouveau, chaque terme sommé étant d'ordre 1 on a $P_{ij} = P_{ij}^{(0)} = p^{(0)} \delta_{ij}$; $q_i = 0$. Ainsi avec $P : \nabla u = (\nabla_j u_k) P_{jk}^{(0)} = (\nabla_j u_k) p \delta_{jk} = p \nabla_j u_j$, on a:

$$\partial_t^{(1)} T + u_i \nabla_i T + \frac{2}{nkd} p^{(0)} \nabla_i u_i = p \frac{2}{n} \omega[f^{(0)}, f^{(1)}] \left(T + \cancel{\tfrac{2m}{kd} u^2}\right) - p \frac{m}{nkd} \omega[f^{(0)}, (V^2 + \cancel{V_j u_j}) f^{(1)}] - p \frac{m}{nkd} \omega[f^{(1)}, (V^2 + \cancel{V_j u_j}) f^{(0)}] \quad (46)$$

• Reformulation du membre de droite de l'équation de Boltzmann (39) : remarquons que les exposants (i) dans les dérivées ne jouent à présent plus aucun rôle, une fois que les équations à un ordre donné sont écrites. On ne les note donc plus dans la suite. Comme on recherche une solution normale, alors toute la dépendance temporelle est à présent contenue dans les champs hydrodynamiques, donc:

$$\partial_t f^{(0)} = \frac{\partial f^{(0)}}{\partial n} \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial f^{(0)}}{\partial u_i} \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial f^{(0)}}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (47)$$

et en notant $\underline{v_1} = (v_1, \dots, v_d)$; $\underline{r_1} = (r_1, \dots, r_d)$, on a:

$$v_1 \cdot \nabla_{r_1} f^{(0)} = v_i \nabla_i f^{(0)} = v_i \frac{\partial f^{(0)}}{\partial n} \frac{\partial n}{\partial r_i} + v_j \frac{\partial f^{(0)}}{\partial u_i} \frac{\partial u_i}{\partial r_j} + v_i \frac{\partial f^{(0)}}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial r_i} \quad (48)$$

Or comme nous connaissons la forme de $f^{(0)}$, donnée par (40), on a aussi:

$$\frac{\partial f^{(0)}}{\partial n} = \frac{1}{n} f^{(0)}, \quad (49)$$

et comme $V = v_1 - u$:

$$\frac{\partial f^{(0)}}{\partial u_i} = -\frac{\partial f^{(0)}}{\partial V_i} \quad (50)$$

(47) – (50) dans le membre de droite de (39) donne:

$$(\partial_t + v_i \nabla_i) f^{(0)} = f^{(0)} \left(\frac{1}{n} \partial_t n + \frac{1}{n} v_i \nabla_i n\right) - \frac{\partial f^{(0)}}{\partial V_i} \left(\partial_t u_i + v_j \nabla_j u_i\right) + \frac{\partial f^{(0)}}{\partial T} \left(\partial_t T + v_i \nabla_i T\right) \quad (51)$$

Pour continuer la simplification, il faut utiliser les équations hydrodynamiques à l'ordre 1 (en effet, on se souvient de la notation correcte $\partial_t^{(1)}$ qui signifie qu'il faut bien reprendre les équations de "conservation" (43), (44), et (46)). Ainsi:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \partial_t n + \frac{1}{n} v_i \nabla_i n &\overset{(43)}{=} \frac{1}{n} \left[-u_i \nabla_i n - n \nabla_i u_i - 2p\,\omega[f^{(0)}, f^{(1)}] + v_i \nabla_i n\right] \\ &\overset{v_i = V_i + u_i}{=} \frac{1}{n} \left[-\cancel{u_i \nabla_i n} + V_i \nabla_i n + \cancel{u_i \nabla_i n} - n \nabla_i u_i - 2p\,\omega[f^{(0)}, f^{(1)}]\right] \\ &= V_i \nabla_i \ln(n) - \nabla_i u_i - 2p \frac{1}{n} \omega[f^{(0)}, f^{(1)}] \end{aligned} \quad (52)$$

$$\begin{aligned} \partial_t u_i + v_j \nabla_j u_i &\overset{(44)}{=} -\frac{1}{mn} \nabla_i p^{(0)} - u_j \nabla_j u_i + p \frac{1}{n} \omega[f^{(0)}, V_i f^{(1)}] + p \frac{1}{n} \omega[f^{(1)}, V_i f^{(0)}] + v_j \nabla_j u_i \\ &\underset{p^{(0)} = nkT}{\overset{v_j = u_j + V_j}{=}} -\frac{1}{mn} \nabla_i (nkT) - \cancel{u_j \nabla_j u_i} + \cancel{u_j \nabla_j u_i} + V_j \nabla_j u_i + p \frac{1}{n} \omega[f^{(0)}, V_i f^{(1)}] + p \frac{1}{n} \omega[f^{(1)}, V_i f^{(0)}] \\ &= V_j \nabla_j u_i - \frac{kT}{m} \nabla_i \ln(n) - \frac{kT}{m} \nabla_i \ln(T) + p \frac{1}{n} \omega[f^{(0)}, V_i f^{(1)}] + p \frac{1}{n} \omega[f^{(1)}, V_i f^{(0)}] \end{aligned} \quad (53)$$

$$\begin{aligned} \partial_t T + v_i \nabla_i T &\overset{(46)}{=} -u_i \nabla_i T - \frac{2}{nkd} p^{(0)} \nabla_i u_i + v_i \nabla_i T + p \frac{2}{n} \omega[f^{(0)}, f^{(1)}] \left(T + \cancel{\tfrac{2m}{kd} u^2}\right) - p \frac{m}{nkd} \omega[f^{(0)}, (V^2 + \cancel{V_j u_j}) f^{(1)}] - p \frac{m}{nkd} \omega[f^{(1)}, (V^2 + \cancel{V_j u_j}) f^{(0)}] \\ &\underset{p^{(0)} = nkT}{\overset{v_j = u_j + V_j}{=}} -\cancel{u_i \nabla_i T} - \frac{2}{d} T \nabla_i u_i + \cancel{u_i \nabla_i T} + V_i \nabla_i T + p \frac{2}{n} \omega[f^{(0)}, f^{(1)}] \left(T + \cancel{\tfrac{2m}{kd} u^2}\right) - p \frac{m}{nkd} \omega[f^{(0)}, (V^2 + \cancel{V_j u_j}) f^{(1)}] - p \frac{m}{nkd} \omega[f^{(1)}, (V^2 + \cancel{V_j u_j}) f^{(0)}] \\ &= V_i \nabla_i T - \frac{2}{d} T \nabla_i u_i + p \frac{2}{n} \omega[f^{(0)}, f^{(1)}] \left(T + \cancel{\tfrac{2m}{kd} u^2}\right) - p \frac{m}{nkd} \omega[f^{(0)}, (V^2 + \cancel{V_j u_j}) f^{(1)}] - p \frac{m}{nkd} \omega[f^{(1)}, (V^2 + \cancel{V_j u_j}) f^{(0)}] \end{aligned} \quad (54)$$

Met tout ensemble: (51)–(54) dans l'éq. de Boltzmann (39) donne:

$$\begin{aligned} (\partial_t^{(0)} + L) f^{(1)} = &\; f^{(0)} \left(\nabla_i u_i - V_i \nabla_i \ln(n) + 2p \frac{1}{n} \omega[f^{(0)}, f^{(1)}]\right) \\ &+ \frac{\partial f^{(0)}}{\partial V_i} \left(V_j \nabla_j u_i - \frac{kT}{m} \nabla_i \ln(n) - \frac{kT}{m} \nabla_i \ln(T) + p \frac{1}{n} \omega[f^{(0)}, V_i f^{(1)}] + p \frac{1}{n} \omega[f^{(1)}, V_i f^{(0)}]\right) \\ &+ \frac{\partial f^{(0)}}{\partial T} \left(\frac{2}{d} T \nabla_i u_i - V_i \nabla_i T - p \frac{2}{n} \omega[f^{(0)}, f^{(1)}] \left(T + \cancel{\tfrac{2m}{kd} u^2}\right) + p \frac{m}{nkd} \omega[f^{(0)}, (V^2 + \cancel{V_j u_j}) f^{(1)}] + p \frac{m}{nkd} \omega[f^{(1)}, (V^2 + \cancel{V_j u_j}) f^{(0)}]\right) \end{aligned} \quad (55)$$

En utilisant:

$$\frac{\partial}{\partial V_i} (V_j f^{(0)}) \nabla_j u_i = f^{(0)} \delta_{ij} \nabla_j u_i + V_j \frac{\partial f^{(0)}}{\partial V_i} \nabla_j u_i = f^{(0)} \nabla_i u_i + V_j \frac{\partial f^{(0)}}{\partial V_i} \nabla_j u_i, \quad (56)$$

on peut reformuler (55) de la façon suivante:

$$(\partial_t^{(0)} + L) f^{(1)} = \underbrace{\Big(\underbrace{f^{(0)} \delta_{ij} + V_j \frac{\partial f^{(0)}}{\partial V_i}}_{= \frac{\partial}{\partial V_i}(V_j f^{(0)})} + \frac{2}{d} T \frac{\partial f^{(0)}}{\partial T} \delta_{ij}\Big)}_{:= C_{ij}} \nabla_j u_i + \underbrace{\left(-V_i f^{(0)} - \frac{kT}{m} \frac{\partial f^{(0)}}{\partial V_i}\right)}_{:= B_i} \nabla_i \ln(n) + \underbrace{\left(-V_i T \frac{\partial f^{(0)}}{\partial T} - \frac{kT}{m} \frac{\partial f^{(0)}}{\partial V_i}\right)}_{:= A_i} \nabla_i \ln(T) + p \Omega f^{(1)} \quad (57)$$

où $\Omega f^{(1)}$ est défini par:

$$\Omega f^{(1)} = f^{(0)}\frac{2}{\pi}\,\omega[f^{(0)},f^{(1)}] + \frac{\partial f^{(0)}}{\partial V_i}\;\frac{1}{n}\left\{\omega[f^{(0)},V_i f^{(1)}] + \omega[f^{(1)},V_i f^{(0)}]\right\}$$
$$+\frac{\partial f^{(0)}}{\partial T}\,\frac{1}{n}\left\{-2\omega[f^{(0)},f^{(1)}]\left(T+\dots\right) + \frac{m}{\kappa d}\,\omega[f^{(0)},(V^2+\dots)f^{(1)}] + \frac{m}{\kappa d}\,\omega[f^{(1)},(V^2+\dots)f^{(0)}]\right\} \qquad (58)$$

• Reformulation du membre de gauche : nous savons que $f^{(1)}$ est de la forme (40). Comme discuté auparavant, il faut substituer cette forme générale dans le membre de gauche de (55), mettre en évidence les gradients, pour finalement égaler les coefficients des différents gradients. Pour cela, on a d'abord besoin de $\partial_t^{(0)} f^{(1)}$:

$$\frac{\partial^{(0)} f^{(1)}}{\partial t} = \frac{\partial^{(0)}}{\partial t}\left(\alpha_i \nabla_i \ln(T) + \beta_i \nabla_i \ln(n) + \gamma_{ij}\nabla_j u_i\right)$$
$$= \nabla_i \ln(T)\frac{\partial^{(0)}\alpha_i}{\partial t} + \nabla_i \ln(n)\frac{\partial^{(0)}\beta_i}{\partial t} + \nabla_j u_i \frac{\partial^{(0)}\gamma_{ij}}{\partial t} + \alpha_i \underbrace{\partial_t^{(0)}\nabla_i \ln(T)}_{=\nabla_i \frac{1}{T}\partial_t^{(0)}T} + \beta_i \underbrace{\partial_t^{(0)}\nabla_i \ln(n)}_{=\nabla_i \frac{1}{n}\partial_t^{(0)} n} + \gamma_{ij}\underbrace{\partial_t^{(0)}\nabla_j u_i}_{=\nabla_j \partial_t^{(0)} u_i}$$
$$= \nabla_i \ln(T)\left[\frac{\partial\alpha_i}{\partial T}\frac{\partial^{(0)}T}{\partial t} + \frac{\partial \alpha_i}{\partial n}\frac{\partial^{(0)}n}{\partial t} + \frac{\partial\alpha_i}{\partial u_j}\frac{\partial^{(0)}u_j}{\partial t}\right] + \nabla_i \ln(n)\left[\frac{\partial\beta_i}{\partial T}\frac{\partial^{(0)}T}{\partial t} + \frac{\partial\beta_i}{\partial n}\frac{\partial^{(0)}n}{\partial t} + \frac{\partial\beta_i}{\partial u_j}\frac{\partial^{(0)}u_j}{\partial t}\right]$$
$$+\nabla_j u_i\left[\frac{\partial\gamma_{ij}}{\partial T}\frac{\partial^{(0)}T}{\partial t} + \frac{\partial\gamma_{ij}}{\partial n}\frac{\partial^{(0)}n}{\partial t} + \frac{\partial\gamma_{ij}}{\partial u_k}\frac{\partial^{(0)}u_k}{\partial t}\right]$$
$$+\alpha_i \nabla_i \frac{1}{T}\frac{\partial^{(0)}T}{\partial t} + \beta_i \nabla_i \frac{1}{n}\frac{\partial^{(0)}n}{\partial t} + \gamma_{ij}\nabla_j \frac{\partial^{(0)}u_i}{\partial t} \qquad (59)$$

La dérivée temporelle des champs hydrodynamiques est celle de l'ordre zéro, donc ces dérivées sont données par les équations de "conservation" de l'ordre zéro. Définissons :

$$\partial_t^{(0)} n = -p\, n\, \xi_n^{(0)} \;;\quad \xi_n^{(0)} = \frac{1}{n}\,\omega[f^{(0)},f^{(0)}] \qquad (60)$$
$$\partial_t^{(0)} u_i = -p\,\xi_{u_i}^{(0)} \;;\quad \xi_{u_i}^{(0)} = \frac{1}{n}\,\omega[f^{(0)}, V_i f^{(0)}] \qquad (61)$$
$$\partial_t^{(0)} T = -p\,T\,\xi_T^{(0)} \;;\quad \xi_T^{(0)} = \frac{1}{nT}\left\{-\left(T+\frac{2m}{\kappa d}u^2\right)\omega[f^{(0)},f^{(0)}] + \frac{m}{\kappa d}\,\omega[f^{(0)},(V^2+v_j u_j)f^{(0)}]\right\} \qquad (62)$$

Alors :

$$\nabla_i \frac{1}{T}\frac{\partial^{(0)}T}{\partial t} \overset{(62)}{=} \nabla_i \frac{1}{T}(-p)T\xi_T^{(0)} = -p\,\nabla_i \xi_T^{(0)} = -p\left(\frac{\partial \xi_T^{(0)}}{\partial n}\nabla_i n + \frac{\partial\xi_T^{(0)}}{\partial T}\nabla_i T + \frac{\partial \xi_T^{(0)}}{\partial u_j}\nabla_i u_j\right)$$
$$= -p\left(n\frac{\partial\xi_T^{(0)}}{\partial n}\nabla_i \ln(n) + T\frac{\partial \xi_T^{(0)}}{\partial T}\nabla_i \ln(T) + \frac{\partial \xi_T^{(0)}}{\partial u_j}\nabla_i u_j\right) \qquad (63)$$

$$\nabla_i \frac{1}{n}\frac{\partial^{(0)}n}{\partial t} \overset{(60)}{=} \nabla_i \frac{1}{n}(-p)\,n\,\xi_n^{(0)} = -p\left(n\frac{\partial\xi_n^{(0)}}{\partial n}\nabla_i \ln(n) + T\frac{\partial\xi_n^{(0)}}{\partial T}\nabla_i \ln(T) + \frac{\partial\xi_n^{(0)}}{\partial u_j}\nabla_i u_j\right) \qquad (64)$$

$$\nabla_j \frac{\partial^{(0)}u_i}{\partial t} \overset{(61)}{=} \nabla_j (-p)\xi_{u_i}^{(0)} = -p\left(\frac{\partial\xi_{u_i}^{(0)}}{\partial n}\nabla_j n + \frac{\partial \xi_{u_i}^{(0)}}{\partial T}\nabla_j T + \frac{\partial\xi_{u_i}^{(0)}}{\partial u_k}\nabla_j u_k\right) = -p\left(n\frac{\partial\xi_{u_i}^{(0)}}{\partial n}\nabla_j \ln(n) + T\frac{\partial\xi_{u_i}^{(0)}}{\partial T}\nabla_j \ln(T) + \frac{\partial\xi_{u_i}^{(0)}}{\partial u_k}\nabla_j u_k\right) \qquad (65)$$

En remplaçant (60)–(65) dans (59) on a :

$$\frac{\partial^{(0)} f^{(1)}}{\partial t} = \nabla_i \ln(T)\left[\frac{\partial\alpha_i}{\partial T}(-p)T\xi_T^{(0)} + \frac{\partial\alpha_i}{\partial n}(-p)\,n\,\xi_n^{(0)} + \frac{\partial\alpha_i}{\partial u_j}(-p)\,\xi_{u_j}^{(0)}\right] + \nabla_i \ln(n)\left[\frac{\partial\beta_i}{\partial T}(-p)T\xi_T^{(0)} + \frac{\partial\beta_i}{\partial n}(-p)\,n\,\xi_n^{(0)} + \frac{\partial\beta_i}{\partial u_j}(-p)\,\xi_{u_j}^{(0)}\right]$$
$$+\nabla_j u_i\left[\frac{\partial\gamma_{ij}}{\partial T}(-p)T\xi_T^{(0)} + \frac{\partial\gamma_{ij}}{\partial n}(-p)\,n\,\xi_n^{(0)} + \frac{\partial\gamma_{ij}}{\partial u_k}(-p)\,\xi_{u_k}^{(0)}\right]$$
$$-p\,\alpha_i\left[n\frac{\partial\xi_T^{(0)}}{\partial n}\nabla_i \ln(n) + T\frac{\partial\xi_T^{(0)}}{\partial T}\nabla_i \ln(T) + \frac{\partial\xi_T^{(0)}}{\partial u_j}\nabla_i u_j\right] - p\,\beta_i\left[n\frac{\partial\xi_n^{(0)}}{\partial n}\nabla_i \ln(n) + T\frac{\partial \xi_n^{(0)}}{\partial T}\nabla_i \ln(T) + \frac{\partial\xi_n^{(0)}}{\partial u_j}\nabla_i u_j\right]$$
$$-p\,\gamma_{ij}\left[n\frac{\partial\xi_{u_i}^{(0)}}{\partial n}\nabla_j \ln(n) + T\frac{\partial\xi_{u_i}^{(0)}}{\partial T}\nabla_j \ln(T) + \frac{\partial\xi_{u_i}^{(0)}}{\partial u_k}\nabla_j u_k\right] \qquad (66)$$

Dans le dernier terme de (66), il y a sommation sur les indices muets i, j, que l'on renomme de façon appropriée pour pouvoir mettre en évidence les gradients $\nabla_i \ln(T)$; $\nabla_i \ln(n)$; $\nabla_j u_i$:

$$-p\,\gamma_{ij}\,n\frac{\partial\xi_{u_i}^{(0)}}{\partial n}\nabla_j \ln(n) \xrightarrow{i\leftrightarrow j} -p\,\gamma_{ji}\,n\frac{\partial \xi_{u_j}^{(0)}}{\partial n}\nabla_i \ln(n) \qquad (67)$$
$$-p\,\gamma_{ij}\,T\frac{\partial\xi_{u_i}^{(0)}}{\partial T}\nabla_j \ln(T) \xrightarrow{i\leftrightarrow j} -p\,\gamma_{ji}\,T\frac{\partial\xi_{u_j}^{(0)}}{\partial T}\nabla_i \ln(T) \qquad (68)$$
$$-p\,\gamma_{ij}\frac{\partial\xi_{u_i}^{(0)}}{\partial u_k}\nabla_j u_k \xrightarrow{i\leftrightarrow k} -p\,\gamma_{kj}\frac{\partial\xi_{u_k}^{(0)}}{\partial u_i}\nabla_j u_i \qquad (69)$$

(67) – (69) dans (66) donne :

$$\frac{\partial^{(0)} f}{\partial t} = \nabla_i \ln(T)(-p)\left[\frac{\partial\alpha_i}{\partial T}T\xi_T^{(0)} + \frac{\partial\alpha_i}{\partial n}n\,\xi_n^{(0)} + \frac{\partial\alpha_i}{\partial u_j}\xi_{u_j}^{(0)} + \alpha_i T\frac{\partial\xi_T^{(0)}}{\partial T} + \beta_i T\frac{\partial\xi_n^{(0)}}{\partial T} + \gamma_{ji}T\frac{\partial\xi_{u_j}^{(0)}}{\partial T}\right]$$
$$+\nabla_i \ln(n)(-p)\left[\frac{\partial\beta_i}{\partial T}T\xi_T^{(0)} + \frac{\partial\beta_i}{\partial n}n\,\xi_n^{(0)} + \frac{\partial\beta_i}{\partial u_j}\xi_{u_j}^{(0)} + \alpha_i\, n\frac{\partial\xi_T^{(0)}}{\partial n} + \beta_i\, n\frac{\partial\xi_n^{(0)}}{\partial n} + \gamma_{ji}\, n\frac{\partial\xi_{u_j}^{(0)}}{\partial n}\right]$$
$$+\nabla_j u_i(-p)\left[\frac{\partial\gamma_{ij}}{\partial T}T\xi_T^{(0)} + \frac{\partial\gamma_{ij}}{\partial n}n\,\xi_n^{(0)} + \frac{\partial\gamma_{ij}}{\partial u_k}\xi_{u_k}^{(0)} + \alpha_i\frac{\partial\xi_T^{(0)}}{\partial u_j} + \beta_i\frac{\partial\xi_n^{(0)}}{\partial u_j} + \gamma_{kj}\frac{\partial\xi_{u_k}^{(0)}}{\partial u_i}\right] \qquad (70)$$

$$:= -p\,\mathcal{A}_i\nabla_i \ln(T) - p\,\mathcal{B}_i\nabla_i \ln(n) - p\,\mathcal{C}_{ij}\nabla_j u_i\,, \qquad (71)$$

où $\mathcal{A}_i$, $\mathcal{B}_i$ et $\mathcal{C}_{ij}$ sont définis par le passage de (70) à (71). D'autre part, comme l'opérateur L est linéaire on a :

$$L f^{(1)} \overset{(40)}{=} L\left(\alpha_i\nabla_i \ln(T) + \beta_i\nabla_i \ln(n) + \gamma_{ij}\nabla_j u_i\right)$$
$$= \nabla_i \ln(T)\,L\alpha_i + \nabla_i \ln(n)\,L\beta_i + \nabla_j u_i\,L\gamma_{ij}\,. \qquad (72)$$

En effet, l'opérateur L dont la définition est donnée par (38), (6), et (7), n'agit pas sur les champs hydrodynamiques, qui effectivement ne dépendent que de la position et du temps (on se souvient que l'opérateur L consiste essentiellement en une intégration sur les vitesses). Ainsi de (71) et (72) :

$$(\partial_t^{(0)} + L)f^{(1)} = (-p\mathcal{A}_i + L\alpha_i)\nabla_i \ln(T) + (-p\mathcal{B}_i + L\beta_i)\nabla_i \ln(n) + (-p\,\mathcal{C}_{ij} + L\gamma_{ij})\nabla_j u_i \qquad (73)$$

En remplaçant (73) dans (57) on obtient finalement l'équation de Boltzmann :

$$(-p\mathcal{A}_i + L\alpha_i)\nabla_i \ln(T) + (-p\mathcal{B}_i + L\beta_i)\nabla_i \ln(n) + (-p\,\mathcal{C}_{ij} + L\gamma_{ij})\nabla_j u_i = A_i\nabla_i \ln(T) + B_i\nabla_i \ln(n) + C_{ij}\nabla_j u_i + p\,\Omega f^{(1)} \qquad (74)$$

À nouveau, on peut développer $\Omega f^{(1)}$:

$$\Omega f^{(1)} \overset{(40)}{=} \Omega\left(\alpha_i\nabla_i \ln(T) + \beta_i\nabla_i \ln(n) + \gamma_{ij}\nabla_j u_i\right) = \nabla_i \ln(T)\,\Omega\alpha_i + \nabla_i \ln(n)\,\Omega\beta_i + \nabla_j u_i\,\Omega\gamma_{ij} \qquad (75)$$

En effet, pour les mêmes raisons que précédemment on voit de la définition (58) de Ω que cet opérateur linéaire n'agit que sur les vitesses, donc pas sur les gradients. (75) dans (74) donne :

$$(-p\mathcal{A}_i + L\alpha_i)\nabla_i \ln(T) + (-p\mathcal{B}_i + L\beta_i)\nabla_i \ln(n) + (-p\,\mathcal{C}_{ij} + L\gamma_{ij})\nabla_j u_i = (A_i + p\Omega\alpha_i)\nabla_i \ln(T) + (B_i + p\Omega\beta_i)\nabla_i \ln(n) + (C_{ij} + p\Omega\gamma_{ij})\nabla_j u_i \qquad (76)$$

Comme on peut faire varier de façon indépendante les gradients des champs hydrodynamiques, (76) fournit $d(d+2)$ équations pour les $d(d+2)$ inconnues $\alpha_i, \beta_i, \gamma_{ij}$. En résumé, on a donc :

$$-p\mathcal{A}_i + (L - p\Omega)\alpha_i = A_i \qquad (77)$$
$$-p\mathcal{B}_i + (L - p\Omega)\beta_i = B_i \qquad (78)$$
$$-p\,\mathcal{C}_{ij} + (L - p\Omega)\gamma_{ij} = C_{ij} \qquad (79)$$

où :

$$\mathcal{A}_i = T\xi_T^{(0)}\frac{\partial\alpha_i}{\partial T} + n\,\xi_n^{(0)}\frac{\partial\alpha_i}{\partial n} + \xi_{u_j}^{(0)}\frac{\partial\alpha_i}{\partial u_j} + \alpha_i T\frac{\partial\xi_T^{(0)}}{\partial T} + \beta_i T\frac{\partial\xi_n^{(0)}}{\partial T} + \gamma_{ji} T\frac{\partial\xi_{u_j}^{(0)}}{\partial T} \tag{80}$$

$$\mathcal{B}_i = T\xi_T^{(0)}\frac{\partial\beta_i}{\partial T} + n\,\xi_n^{(0)}\frac{\partial\beta_i}{\partial n} + \xi_{u_j}^{(0)}\frac{\partial\beta_i}{\partial u_j} + \alpha_i n\frac{\partial\xi_T^{(0)}}{\partial n} + \beta_i n\frac{\partial\xi_n^{(0)}}{\partial n} + \gamma_{ji} n\frac{\partial\xi_{u_j}^{(0)}}{\partial n} \tag{81}$$

$$\mathcal{C}_{ij} = T\xi_T^{(0)}\frac{\partial\gamma_{ij}}{\partial T} + n\,\xi_n^{(0)}\frac{\partial\gamma_{ij}}{\partial n} + \xi_{u_k}^{(0)}\frac{\partial\gamma_{ij}}{\partial u_k} + \alpha_i\frac{\partial\xi_T^{(0)}}{\partial u_j} + \beta_i\frac{\partial\xi_n^{(0)}}{\partial u_j} + \gamma_{kj}\frac{\partial\xi_k^{(0)}}{\partial u_i} \tag{82}$$

$$A_i = -V_i T\frac{\partial f^{(0)}}{\partial T} - \frac{kT}{m}\frac{\partial f^{(0)}}{\partial V_i} \tag{83}$$

$$B_i = -V_i f^{(0)} - \frac{kT}{m}\frac{\partial f^{(0)}}{\partial V_i} \tag{84}$$

$$C_{ij} = \frac{\partial}{\partial V_i}\left(V_j f^{(0)}\right) + \frac{2}{d}T\delta_{ij}\frac{\partial f^{(0)}}{\partial T} \tag{85}$$

$$\Omega g = f^{(0)}\frac{2}{n}\,\omega[f^{(0)},g] + \frac{\partial f^{(0)}}{\partial V_i}\cdot\frac{1}{n}\left\{\omega[f^{(0)},V_i g] + \omega[f^{(1)},V_i f^{(0)}]\right\} + \frac{\partial f^{(0)}}{\partial T}\,\frac{1}{n}\left\{-2\left(T+\ldots\right)\omega[f^{(0)},g] + \frac{m}{kd}\omega[f^{(0)},(V^2+\ldots)g] + \frac{m}{kd}\omega[g,(V^2+\ldots)f^{(0)}]\right\} \tag{86}$$

$$Lg = p\,J_a[f^{(0)},g] + p\,J_a[g,f^{(0)}] + (1-p)\,J_c[f^{(0)},g] + (1-p)\,J_c[g,f^{(0)}] \tag{87}$$

$$\xi_n^{(0)} = \frac{1}{n}\omega[f^{(0)},f^{(0)}] \tag{88}$$

$$\xi_T^{(0)} = \frac{1}{nT}\left\{\frac{m}{kd}\omega[f^{(0)},(V^2+\ldots)f^{(0)}] - \left(T+\ldots\right)\omega[f^{(0)},f^{(0)}]\right\} \tag{89}$$

$$\xi_{u_i}^{(0)} = \frac{1}{n}\omega[f^{(0)},V_i f^{(0)}] = 0 \tag{90}$$

On peut faire beaucoup de simplifications : cf. document LaTeX pour la suite et les corrections.

3.3 Coefficients de transport :

OK ①

La loi phénoménologique linéaire de transport de chaleur de Fourier est :

et celle

$$q_i(r,t) = -\mathcal{K}\nabla_i T(r,t) - \mu \nabla_i n \quad (1)$$

de friction de Newton (fluide newtonien) :

$$P_{ij}(r,t) = p\mathbb{1} - 2\eta\left(\Lambda_{ij} - \frac{1}{d}\delta_{ij}\nabla_i u_j\right) - \xi\delta_{ij}\nabla_i u_j \quad (2)$$

Le tenseur des contraintes Λ_{ij} est défini par

$$\Lambda_{ij} = \frac{1}{2}\left(\nabla_i u_j + \nabla_j u_i\right).$$

$\mathcal{K}$ est le coefficient de conductivité thermique, η le coefficient de viscosité de cisaillement, ξ le coefficient de viscosité volumique, μ est un coefficient de transport qui est ~~normal~~ par le gaz inélastique non nul seulement si le coefficient de restitution est strictement inférieur à l'unité [3]. Nous posons a priori $\mu \neq 0$, et ~~verrons ensuite si déduire~~ concluons ensuite sur la nullité de μ. On tire donc les coefficients de transport par identification entre les lois phénoménologiques macroscopiques et les expressions microscopiques de P_{ij} et q_i.

3.3.1 Equations intégrales

Pression : de l'Eq. (80)

$$P_{ij} = \frac{n}{\beta}\delta_{ij} + \int_{\mathbb{R}^d} dv\, f(r,v,t)\, D_{ij}(V) \quad ; \quad D_{ij}(V) = m\left(V_iV_j - \frac{V^2}{d}\delta_{ij}\right),$$

d'où :

$$P_{ij}^{(1)} = 0 + \int_{\mathbb{R}^d} dv\, D_{ij}(V)\, f^{(1)} = \int_{\mathbb{R}^d} dv\, D_{ij}(V)\left[\mathcal{A}_k(V)\nabla_k \ln(T) + \mathcal{B}_k(V)\nabla_k \ln(n) + \mathcal{Z}_{kl}(V)\nabla_k u_l\right] \quad (3)$$

A nouveau, nous allons dans la suite réaliser le développement de $\mathcal{A}_k$, $\mathcal{B}_k$, et $\mathcal{Z}_{kl}$ en polynômes de Sonine. Nous obtiendrons en particulier au premier ordre non nul $\mathcal{A}_k \sim S_k(V)$, $\mathcal{B}_k \sim S_k(V)$, et $\mathcal{Z}_{kl} \sim D_{kl}(V)$. Donc les propriétés de symétrie de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont les mêmes que celles de S, et celles de $\mathcal{Z}$ les mêmes que pour D :

$$\mathcal{A}_k(-V) = -\mathcal{A}_k(V)$$
$$\mathcal{B}_k(-V) = -\mathcal{B}_k(+V)$$
$$\mathcal{Z}_{kl}(-V) = \mathcal{Z}_{kl}(V)$$

Ainsi comme $D_{ij}(V)$ est une fonction paire de V, tandis que $\mathcal{A}_k$ et $\mathcal{B}_k$ sont impaires, alors l'intégration du produit de ces fonctions sur un domaine symétrique est nulle. Et l'Eq. (3) devient donc :

$$P_{ij}^{(1)} = \int_{\mathbb{R}^d} dv\, D_{ij}(V)\, \mathcal{Z}_{kl}(V)\nabla_k u_l \quad (4)$$

L'identification des Eqs. (2) et (4) mène à [10]

$$\eta = -\frac{1}{(d-1)(d+2)}\int_{\mathbb{R}^d} dV\, D_{ij}(V)\, \mathcal{Z}_{ij}(V) \quad (5)$$

La troisième équation (14D) est

$$-p\left(\xi_T^{(0)} T\partial_T + \xi_n^{(0)} n\partial_n\right)\mathcal{Z}_{ij} + J\mathcal{Z}_{ij} = C_{ij}, \quad (6)$$

que l'on intègre sur V avec poids $-1/(d-1)(d+2)\int_{\mathbb{R}^d} dV\, D_{ij}(V)$ pour obtenir

$$\frac{1}{(d-1)(d+2)}\int_{\mathbb{R}^d} dV\, D_{ij}(V)\left[+p\left(\xi_T^{(0)} T\partial_T\mathcal{Z}_{ij} + \xi_n^{(0)} n\partial_n\mathcal{Z}_{ij}\right)\right] - \frac{1}{(d-1)(d+2)}\int_{\mathbb{R}^d} dV\, D_{ij}(V)\, J\mathcal{Z}_{ij}$$

$$= -\frac{1}{(d-1)(d+2)}\int_{\mathbb{R}^d} dV\, D_{ij}(V)\, C_{ij}(V)$$

$$\Longrightarrow -p\,\xi_T^{(0)}\,T\partial_T\underbrace{\left[-\frac{1}{(d-1)(d+2)}\int_{\mathbb{R}^d} dv\, D_{ij}(v)\, Z_{ij}\right]}_{\overset{(5)}{=}\eta} - p\,\xi_n^{(0)}\, n\partial_n\underbrace{\left[-\frac{1}{(d-1)(d+2)}\int_{\mathbb{R}^d} dv\, D_{ij}(v)\, Z_{ij}\right]}_{\overset{(5)}{=}\eta}$$

$$\underbrace{-\frac{1}{(d-1)(d+2)}\int_{\mathbb{R}^d} dv\, D_{ij}(v)\, Z_{ij}}_{\overset{(5)}{=}\eta}\;\underbrace{\frac{\int_{\mathbb{R}^d} dv\, D_{ij}(v)\, J Z_{ij}}{\int_{\mathbb{R}^d} dv\, D_{ij}(v)\, Z_{ij}}}_{:=\nu_\eta} = -\frac{1}{(d-1)(d+2)}\int_{\mathbb{R}^d} dv\, D_{ij}(v)\, C_{ij}(v)$$

$$\Longrightarrow \left(-p\,\xi_T^{(0)}\,T\partial_T - p\,\xi_n^{(0)}\,n\partial_n + \nu_\eta\right)\eta = -\frac{1}{(d-1)(d+2)}\int_{\mathbb{R}^d} dv\, D_{ij}(v)\, C_{ij}(v) \qquad (7)$$

L'analyse de dépendance fonctionnelle des taux de déclin dans les champs hydrodynamiques ~~donne~~ est la suivante. On sait déjà que $\xi_T^{(0)} \sim nT^{1/2}$ et $\xi_n^{(0)} \sim nT^{1/2}$. Qu'en est-il de η ? Le membre de droite de (7) est :

$$\int_{\mathbb{R}^d} dv\, \underbrace{D_{ij}(v)}_{\sim v^2}\, \underbrace{C_{ij}(v)}_{\sim f^{(0)}} \sim \int_{\mathbb{R}^d} dv\, v^2\, \underbrace{f^{(0)}}_{\sim \frac{n}{T^{d/2}}\tilde f(v^2/T)}$$

$$\sim \int_{\mathbb{R}^d} dv\, v^2\, \frac{n}{T^{d/2}}\,\tilde f(v^2/T) \qquad ;\; y = v/\sqrt{T} \;:\; dy = \frac{dv}{T^{d/2}}$$

$$\sim \int_{\mathbb{R}^d} dy\quad T^{d/2}\, y^2 T\, \frac{n}{T^{d/2}}\,\tilde f(y^2)$$

$$\sim nT \qquad (8)$$

Le membre de gauche de (7) est proportionnel à $\xi_{n,T}^{(0)}\,\eta$, soit à $nT^{1/2}\eta$. On en conclut donc que

$$nT^{1/2}\eta \sim nT$$

$$\Longrightarrow \eta \sim n^0 T^{1/2} \qquad (9)$$

Par conséquent

$$T\partial_T\eta = \text{cte}\; T\partial_T T^{1/2} = \frac{1}{2}\,\text{cte}\; T^{1/2} = \frac{1}{2}\eta \qquad (10)$$

$$n\partial_n\eta = 0. \qquad (11)$$

Insérant (10) et (11) dans (7) il vient

$$\left(-\tfrac{1}{2}p\,\xi_T^{(0)} + \nu_\eta\right)\eta = -\frac{1}{(d-1)(d+2)}\int_{\mathbb{R}^d} dv\, D_{ij}(v)\, C_{ij}(v)$$

$$\Longrightarrow \eta = -\frac{1}{(d-1)(d+2)\left(\nu_\eta - \frac{1}{2}p\,\xi_T^{(0)}\right)}\int_{\mathbb{R}^d} dv\, D_{ij}(v)\, C_{ij}(v) \qquad (12)$$

En utilisant les définitions de $D_{ij}(v)$ et $C_{ij}(v)$ il vient :

$$\int_{\mathbb{R}^d} dv\, D_{ij}(v)\, C_{ij}(v) = m\int_{\mathbb{R}^d} dv\left(v_iv_j - \frac{v^2}{d}\delta_{ij}\right)\left[\frac{\partial}{\partial v_i}\left(v_j f^{(0)}\right) - \frac{1}{d}\frac{\partial}{\partial v_k}\left(v_k f^{(0)}\right)\delta_{ij}\right]$$

$$= m\int_{\mathbb{R}^d} dv\left(v_iv_j - \frac{v^2}{d}\delta_{ij}\right)\frac{\partial}{\partial v_i}\left(v_j f^{(0)}\right) - \frac{m}{d}\underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} dv\left(v_iv_j - \frac{v^2}{d}\delta_{ij}\right)\frac{\partial}{\partial v_k}\left(v_k f^{(0)}\right)\delta_{ij}}_{=\int_{\mathbb{R}^d} dv\left(\underbrace{v_iv_j\delta_{ij}}_{=v^2} - \frac{v^2}{d}\underbrace{\delta_{ij}\delta_{ij}}_{=v^2}\right)\frac{\partial}{\partial v_k}\left(v_k f^{(0)}\right) = 0}$$

$$= m \int_{\mathbb{R}^d} dV\, V_i V_j \underbrace{\frac{\partial}{\partial V_i}\left(V_j f^{(0)}\right)}_{=\delta_{ij} f^{(0)} + V_j \frac{\partial f^{(0)}}{\partial V_i}} - \frac{m}{d} \int_{\mathbb{R}^d} dV\, V^2 \underbrace{\delta_{ij} \frac{\partial}{\partial V_i}\left(V_j f^{(0)}\right)}_{= \frac{\partial}{\partial V_i}\left(V_i f^{(0)}\right) = d f^{(0)} + V_i \frac{\partial f^{(0)}}{\partial V_i}}$$

$$= m \int_{\mathbb{R}^d} dV\, \underbrace{V_i V_j \delta_{ij}}_{=V^2} f^{(0)} + m \int_{\mathbb{R}^d} dV\, \underbrace{V_i V_j V_j \frac{\partial f^{(0)}}{\partial V_i}}_{= V^2 V_i \frac{\partial f^{(0)}}{\partial V_i}} - m \int_{\mathbb{R}^d} dV\, V^2 f^{(0)} - \frac{m}{d} \int_{\mathbb{R}^d} dV\, V^2 V_i \frac{\partial f^{(0)}}{\partial V_i}$$

$$= m \int_{\mathbb{R}^d} dV\, V^2 f^{(0)} - m \int_{\mathbb{R}^d} dV\, V^2 f^{(0)} + m\frac{d-1}{d} \int_{\mathbb{R}^d} dV\, V^2 V_i \frac{\partial f^{(0)}}{\partial V_i}$$

$$= m\frac{d-1}{d}\left[- \int_{\mathbb{R}^d} dV\, \frac{\partial}{\partial V_i}\left(V^2 V_i\right) f^{(0)} + \underbrace{\lim_{|\Lambda| \to \infty} V^2 V_i f^{(0)} \Big|_{\partial \Lambda}}_{=0} \right]$$

$$= - m \frac{d-1}{d} \int_{\mathbb{R}^d} dV\, f^{(0)} \underbrace{\frac{\partial}{\partial V_i}\left(V_j V_j V_i\right)}_{= d \cdot V^2 + V_i \cdot 2 V_j \delta_{ij} = (d+2) V^2}$$

$$= - m \frac{(d-1)(d+2)}{d} \int_{\mathbb{R}^d} dV\, V^2 f^{(0)} \tag{13}$$

Insérant (13) dans (12) il vient :

$$\eta = \frac{1}{\nu_\eta - \frac{1}{2} p \zeta_T^{(0)}} \frac{1}{d} \int_{\mathbb{R}^d} dV\, m V^2 f^{(0)} \tag{14}$$

Or de l'Eq. (5) :

$$p^{(0)} = n k_B T = \frac{1}{d} \int_{\mathbb{R}^d} dV\, m V^2 f^{(0)}, \tag{15}$$

que l'on insère dans (14) pour obtenir :

$$\eta = \frac{p^{(0)}}{\nu_\eta - \frac{1}{2} p \zeta_T^{(0)}} \tag{16}$$

Introduisons la viscosité η_0 du gaz de sphères dures $p = 0$, définie par [11]

$$\eta_0 = \frac{d+2}{8} \frac{\Gamma(d/2)}{\pi^{(d-1)/2}} \frac{\sqrt{m k_B T}}{\sigma^{d-1}}, \tag{17}$$

de même que la fréquence caractéristique de collision ν_0 :

$$\nu_0 = \frac{p^{(0)}}{\eta_0} \overset{(15)}{=} \frac{8}{d+2} \frac{\pi^{(d-1)/2}}{\Gamma(d/2)} \sigma^{d-1} n \sqrt{\frac{k_B T}{m}}, \tag{18}$$

alors (16) se réécrit :

$$\boxed{\frac{\eta}{\eta_0} = \frac{1}{\nu_\eta^* - \frac{1}{2} p \zeta_T^{(0)*}}}, \tag{19}$$

où :

$$\zeta_T^{(0)*} = \frac{\zeta_T^{(0)}}{\nu_0}$$

$$\nu_\eta^* = \frac{\nu_\eta}{\nu_0}$$

Il est remarquable que la structure de (19) est formellement identique à celle du gaz inélastique [3]. La différence implicite réside néanmoins dans les grandeurs $\xi_T^{(0)*}$ et ν_2^* qui sont définies différemment.

Courant de chaleur : de l'Eq. (41)

$$q_i(r,t) = \int_{\mathbb{R}^d} dv\, S_i(v)\, f(r,v,t) \quad , \quad S_i(V) = \left(\frac{m}{2}V^2 - \frac{d+2}{2}T\right) V_i \quad , \qquad (7)$$

d'où :

$$\begin{aligned} q_i^{(1)} &= \int_{\mathbb{R}^d} dv\, S_i(V)\, f^{(1)} \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} dv\, S_i(V)\left[\mathcal{A}_k^{(V)} \nabla_k \ln T + \mathcal{B}_k^{(V)} \nabla_k \ln n + 2_{ke}(V)\, \nabla_k u_e\right] \end{aligned} \qquad (8)$$

Au niveau, par des raisons de symétrie comme $S_i(V)$ est impair en V et $2_{ke}(V)$ pair, alors l'intégration correspondante est nulle. Ainsi :

$$q_i^{(1)} = \int_{\mathbb{R}^d} dv\, S_i(v)\, \mathcal{A}_k(v)\, \nabla_k \ln(T) + \int_{\mathbb{R}^d} dv\, S_i(v)\, \mathcal{B}_k(V)\, \nabla_k \ln(n) \qquad (9)$$

Or :

$$\int_{\mathbb{R}^d} dv\, S_i(v)\, \mathcal{A}_k(v)\, \nabla_k \ln(T) = \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}^d} dv\, S_i(v)\, \mathcal{A}_k(v)\right)}_{:= M_{ik}} \underbrace{\nabla_k \ln(T)}_{:= B_k} \qquad (10)$$

Par symétrie, si $i \neq k$ alors l'intégrand de M_{ik} est impair en V donc $M_{ik} = 0$. Ainsi $M_{ik} = M_{kk}\,\delta_{ik}$. Par isotropie $M_{kk} = M\ \forall k$, et donc

$$\mathrm{Tr}(M) = \int_{\mathbb{R}^d} dv\, S_k(v)\, \mathcal{A}_k(V) = d \cdot M \ , \qquad (11)$$

d'où

$$M = \frac{1}{d}\int_{\mathbb{R}^d} dv\, S_k(V)\, \mathcal{A}_k(V) \qquad (12)$$

et

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} dv\, S_i(v)\, \mathcal{A}_k(V)\, \nabla_k \ln(T) &= M_{ik}\, B_k \\ &= M_{ik}\, B_k\, \delta_{ik} \\ &= M\, B_k\, \delta_{ik} \\ &= M\, B_i \\ &= \frac{1}{d}\int_{\mathbb{R}^d} dv\, S_k(V)\, \mathcal{A}_k(V)\ \nabla_i \ln(T) \end{aligned} \qquad (13)$$

Il en va de même pour la seconde intégrale de (9), qui devient donc

$$q_i^{(1)} = \frac{1}{dT}\int_{\mathbb{R}^d} dv\, S_i(v)\, \mathcal{A}_i(v)\ \nabla_i T + \frac{1}{dn}\int_{\mathbb{R}^d} dv\, S_i(V)\, \mathcal{B}_i(V)\ \nabla_i n \ , \qquad (14)$$

que l'on identifie avec la loi phénoménologique (1) pour obtenir :

$$\kappa = -\frac{1}{dT}\int_{\mathbb{R}^d} dv\, S_i(V)\, \mathcal{A}_i(V) \qquad (15)$$

et

$$\mu = -\frac{1}{dn}\int_{\mathbb{R}^d} dv\, S_i(V)\, \mathcal{B}_i(V) \qquad (16)$$

Reformulons ces dernières équations. La première des Eqs. (140) est :

$$-p\left(\xi_T^{(0)}\, T\partial_T + \xi_n^{(0)}\, n\partial_n + \tfrac{1}{2}\xi_T^{(0)}\right)\mathcal{A}_i + J\mathcal{A}_i^{-p\Omega} - p\,\tfrac{1}{2}\,\xi_n^{(0)}\,\mathcal{B}_i = A_i \ ,$$

que l'on intègre sur V avec poids $-1/d \int_{\mathbb{R}^d} dv\, S_i(V)$ pour obtenir :

$$-\frac{1}{d}\int_{\mathbb{R}^d} dv\, S_i(v)\left[-p\left(\xi_T^{(0)}\, T\partial_T \mathcal{A}_i + \xi_n^{(0)}\, n\partial_n \mathcal{A}_i + \tfrac{1}{2}\,\xi_T^{(0)}\mathcal{A}_i\right)\right] - \frac{1}{d}\int_{\mathbb{R}^d} dv\, S_i(v)\, J\tilde{\mathcal{A}}_i$$

$$-\frac{1}{d}\int_{\mathbb{R}^d} dv\, S_i(v)\left[-p\,\tfrac{1}{2}\,\xi_n^{(0)}\mathcal{B}_i\right] = -\frac{1}{d}\int_{\mathbb{R}^d} dv\, S_i(v)\, A_i(v)$$

$$\Longrightarrow -p\,\xi_T^{(0)}\, T\partial_T \overbrace{\left[-\frac{1}{d}\int_{\mathbb{R}^d} dv\, S_i(v)\mathcal{A}_i\right]}^{\overset{(15)}{=}\, T\mathcal{K}} - p\,\xi_n^{(0)}\, n\partial_n \overbrace{\left[-\frac{1}{d}\int_{\mathbb{R}^d} dv\, S_i(v)\mathcal{A}_i\right]}^{\overset{(15)}{=}\, T\mathcal{K}}$$

$$-p\,\tfrac{1}{2}\,\xi_T^{(0)}\underbrace{\left[-\frac{1}{d}\int_{\mathbb{R}^d} dv\, S_i(v)\mathcal{A}_i\right]}_{\overset{(15)}{=}\, T\mathcal{K}} - p\,\tfrac{1}{2}\,\xi_n^{(0)}\underbrace{\left[-\frac{1}{d}\int_{\mathbb{R}^d} dv\, S_i(v)\mathcal{B}_i\right]}_{\overset{(16)}{=}\, n\mu}$$

$$-\underbrace{\frac{1}{d}\int_{\mathbb{R}^d} dv\, S_i(v)\mathcal{A}_i}_{\overset{(15)}{=}\, T\mathcal{K}}\ \underbrace{\frac{\int_{\mathbb{R}^d} dv\, S_i(v)\, J\tilde{\mathcal{A}}_i}{\int_{\mathbb{R}^d} dv\, S_i(v)\mathcal{A}_i}}_{:=\,\nu_K} = -\frac{1}{d}\int_{\mathbb{R}^d} dv\, S_i(v)\, A_i(v)$$

$$\Longrightarrow \left(-p\,\xi_T^{(0)}\, T\partial_T(T\mathcal{K}) - p\,\xi_n^{(0)}\, n\partial_n(T\mathcal{K}) - p\,\tfrac{1}{2}\,\xi_T^{(0)}\, T\mathcal{K} - p\,\tfrac{1}{2}\,\xi_n^{(0)}\, n\mu + T\mathcal{K}\,\nu_K\right) = -\frac{1}{d}\int_{\mathbb{R}^d} dv\, S_i(v)A_i(v) \qquad (17)$$

A nouveau, on peut étudier la dépendance fonctionnelle de $\mathcal{K}$ et μ dans les champs hydrodynamiques. Le membre de droite de (17) donne :

$$\int_{\mathbb{R}^d} dv\, \underbrace{S_i(v)}_{\sim T V_i}\ \underbrace{A_i(v)}_{\sim V_i f^{(0)}} \sim \int dv\, T\, V_i^2\, \frac{n}{T^{d/2}}\, \tilde{f}(v^2/T) \quad ;\ Y = v/\sqrt{T}\ ;\ dy = dv/T^{d/2}$$

$$\sim \int dy\, \cancel{T^{d/2}}\, T\, T\, Y^2\, \frac{n}{\cancel{T^{d/2}}}\,\tilde{f}(Y^2)$$

$$\sim nT^2$$

Comme nous savons que $\xi_T^{(0)} \sim nT^{1/2}$ et $\xi_n^{(0)} \sim nT^{1/2}$, alors on en déduit que :

$$\xi_T^{(0)}\, T\mathcal{K} \sim nT^2 \Longrightarrow \cancel{n}T^{1/2}\, T\mathcal{K} \sim \cancel{n}T^2 \Longrightarrow T^{3/2}\mathcal{K} \sim T^2 \Longrightarrow \mathcal{K} \sim T^{1/2} \qquad (18)$$

$$\xi_n^{(0)}\, n\mu \sim nT^2 \Longrightarrow \cancel{n}T^{1/2}\, n\mu \sim \cancel{n}T^2 \Longrightarrow nT^{1/2}\mu \sim T^2 \Longrightarrow \mu \sim n^{-1}\, T^{3/2} \qquad (19)$$

Par conséquent :

$$T\partial_T(T\mathcal{K}) = C^{te}\, T\partial_T(T\,T^{1/2}) = C^{te}\, T\,\tfrac{3}{2}\, T^{1/2} = \tfrac{3}{2}\, T\mathcal{K} \qquad (20)$$

$$n\,\partial_n(T\mathcal{K}) = C^{te}\, n\,\partial_n T^{3/2} = 0 \qquad (21)$$

Insérant (20) et (21) dans (17) il vient :

$$\Big(\underbrace{-p\,\xi_T^{(0)}\,\tfrac{3}{2}\, T\mathcal{K} - p\,\tfrac{1}{2}\,\xi_T^{(0)}\, T\mathcal{K}}_{=\,-2p\,\xi_T^{(0)}\, T\mathcal{K}} - p\,\tfrac{1}{2}\,\xi_n^{(0)}\, n\mu + T\mathcal{K}\,\nu_K\Big) = -\frac{1}{d}\int_{\mathbb{R}^d} dv\, S_i(v)\, A_i(v)$$

$$\Longrightarrow \left(-2p\,\xi_T^{(0)}\, T + T\nu_K\right)\mathcal{K} = \tfrac{1}{2}\, p\,\xi_n^{(0)}\, n\mu - \frac{1}{d}\int_{\mathbb{R}^d} dv\, S_i(v)\, A_i(v)$$

$$\Longrightarrow \boxed{\mathcal{K} = \frac{1}{T(\nu_K - 2p\,\xi_T^{(0)})}\left[\tfrac{1}{2}\, p\,\xi_n^{(0)}\, n\mu - \frac{1}{d}\int_{\mathbb{R}^d} dv\, S_i(v)\, A_i(v)\right]} \qquad (22)$$

Cette dernière expression diffère de celle obtenue par le gaz granulaire par la présence du taux de déclin $\xi_n^{(0)}$ [3]. Dans la limite $p \to 0$ on obtient bien les mêmes expressions (ou bien en posant $\xi_n^{(0)}$ et $p = 1$, ce qui dans ce dernier cas n'est qu'une analogie formelle car les systèmes décrits sont alors différents).

Utilisons à présent la seconde des Eqs. (140) :

$$-p\left(\xi_T^{(0)} T\partial_T + \xi_n^{(0)} n\partial_n + \xi_n^{(0)}\right)\mathcal{B}_i + J\mathcal{B}_i - p\,\xi_T^{(0)}\mathcal{A}_i = B_i \,, \tag{23}$$

que l'on intègre sur V avec poids $-1/d\int_{\mathbb{R}^d} dv\, S_i(v)$ pour obtenir :

$$-\frac{1}{d}\int_{\mathbb{R}^d} dv\, S_i(v)\left[-p\left(\xi_T^{(0)} T\partial_T \mathcal{B}_i + \xi_n^{(0)} n\partial_n \mathcal{B}_i + \xi_n^{(0)}\mathcal{B}_i\right)\right] - \frac{1}{d}\int_{\mathbb{R}^d} dv\, S_i(v)\, J\mathcal{B}_i$$

$$-\frac{1}{d}\int_{\mathbb{R}^d} dv\, S_i(v)\left[-p\,\xi_T^{(0)}\mathcal{A}_i\right] = -\frac{1}{d}\int_{\mathbb{R}^d} dv\, S_i(v)\, B_i$$

$$\Rightarrow -p\,\xi_T^{(0)} T\partial_T \overbrace{\left[-\frac{1}{d}\int_{\mathbb{R}^d} dv\, S_i(v)\mathcal{B}_i\right]}^{\overset{(16)}{=} n\mu} - p\,\xi_n^{(0)} n\partial_n \overbrace{\left[-\frac{1}{d}\int_{\mathbb{R}^d} dv\, S_i(v)\mathcal{B}_i\right]}^{\overset{(16)}{=} n\mu} - p\,\xi_n^{(0)} \overbrace{\left[-\frac{1}{d}\int_{\mathbb{R}^d} dv\, S_i(v)\mathcal{B}_i\right]}^{\overset{(16)}{=} n\mu}$$

$$- p\,\xi_T^{(0)} \underbrace{\left[-\frac{1}{d}\int_{\mathbb{R}^d} dv\, S_i(v)\mathcal{A}_i\right]}_{\overset{(15)}{=} T\kappa} \underbrace{-\frac{1}{d}\int_{\mathbb{R}^d} dv\, S_i(v)\mathcal{B}_i}_{\overset{(16)}{=} n\mu} \underbrace{\frac{\int_{\mathbb{R}^d} dv\, S_i(v)\, J\mathcal{B}_i}{\int_{\mathbb{R}^d} dv\, S_i(v)\mathcal{B}_i}}_{:= \nu_\mu} = -\frac{1}{d}\int_{\mathbb{R}^d} dv\, S_i(v)\, B_i$$

$$\Rightarrow \left(-p\,\xi_T^{(0)} T\partial_T(n\mu) - p\,\xi_n^{(0)} n\partial_n(n\mu) - p\,\xi_n^{(0)} n\mu - p\,\xi_T^{(0)} T\kappa + n\mu\,\nu_\mu\right) = -\frac{1}{d}\int_{\mathbb{R}^d} dv\, S_i(v)\, B_i \tag{24}$$

A nouveau, on peut utiliser la dépendance fonctionnelle dans les champs hydrodynamiques. On connaît toutes les dépendances, mais on peut néanmoins les vérifier à nouveau. Le membre de droite de (24) donne :

$$\int_{\mathbb{R}^d} dv\, \underbrace{S_i(v)}_{\sim TV_i}\, \underbrace{B_i}_{\sim V_i f^{(0)}} \qquad \sim n T^2$$

car il s'agit de la même dépendance que pour le cas précédent. Ainsi comme $\xi_T^{(0)}, \xi_n^{(0)} \sim n T^{1/2}$:

$$\xi_n^{(0)} n\mu \sim n T^2 \quad \Rightarrow \quad \not{n} T^{1/2} n\mu \sim \not{n} T^2 \quad \Rightarrow \quad \mu \sim n^{-1} T^{3/2}$$

$$\xi_T^{(0)} T\kappa \sim n T^2 \quad \Rightarrow \quad \not{n} T^{1/2} T\kappa \sim \not{n} T^2 \quad \Rightarrow \quad \kappa \sim T^{1/2}$$

Ce qui sont bien les mêmes résultats que (18) et (19). On a donc :

$$T\partial_T(n\mu) = \text{cte}\; T\partial_T(n\, n^{-1} T^{3/2}) = \text{cte}\; n\, n^{-1}\,\frac{3}{2} T^{3/2} = \frac{3}{2} n\mu \tag{25}$$

$$n\partial_n(n\mu) = \text{cte}\; n\partial_n(n\, n^{-1} T^{3/2}) = 0 \tag{26}$$

Insérant (25) et (26) dans (24) il vient :

$$\left(-p\,\xi_T^{(0)}\,\frac{3}{2} n\mu - p\,\xi_n^{(0)} n\mu - p\,\xi_T^{(0)} T\kappa + n\mu\,\nu_\mu\right) = -\frac{1}{d}\int_{\mathbb{R}^d} dv\, S_i(v)\, B_i$$

$$\Rightarrow \left(-\frac{3}{2} p\,\xi_T^{(0)} n - p\,\xi_n^{(0)} n + n\,\nu_\mu\right)\mu = +p\,\xi_T^{(0)} T\kappa - \frac{1}{d}\int_{\mathbb{R}^d} dv\, S_i(v)\, B_i$$

$$\Rightarrow \boxed{\mu = \frac{1}{n\left(\nu_\mu - \frac{3}{2}p\,\xi_T^{(0)} - p\,\xi_n^{(0)}\right)}\left[p\,\xi_T^{(0)} T\kappa - \frac{1}{d}\int_{\mathbb{R}^d} dv\, S_i(v)\, B_i\right]} \tag{27}$$

A nouveau, dans la limite $p \to 0$ (ou bien formellement $p = 1$ et $\xi_n^{(0)} = 0$) on retrouve l'expression du gaz élastique [3].

Les intégrales apparaissant dans les Eqs. (22) et (27) peuvent être simplifiées. Pour ceci, nous avons d'abord besoin de la relation suivante. Nous savons que : [6, 1]

$$a_2 = \frac{4}{d(d+2)}\langle c^4\rangle - 1$$

$$= \frac{4}{d(d+2)}\int_{\mathbb{R}^d} dc\; c^4\, \tilde{f}(c^2) - 1 \,. \tag{28}$$

Avec $\tilde{f}(c) = V_T^d\, f(V)/n$, $V_T = \sqrt{2/\beta m}$, $c^2 = \beta m V^2/2$, $dc = (\beta m/2)^{d/2}\, dV$, il vient :

$$a_2 = \frac{4}{d(d+2)}\int_{\mathbb{R}^d} dV \left(\frac{\beta m}{2}\right)^{\not{d/2}} \left(\frac{\beta m}{2}\right)^2 V^4\, \frac{1}{n}\left(\frac{2}{\beta m}\right)^{\not{d/2}} \tilde{f}(V^2) - 1$$

$$= \frac{4}{d(d+2)}\left(\frac{\beta m}{2}\right)^2 \frac{1}{n}\int dV\, V^4 f(V^2) - 1$$

Comme dans la méthode de Chapman-Enskog les moments de f sont ceux de $f^{(0)}$, on a finalement :

$$a_2 = \frac{4}{d(d+2)}\left(\frac{\beta m}{2}\right)^2 \frac{1}{n}\int_{\mathbb{R}^d} dv\, V^4 f^{(0)} - 1 . \qquad (29)$$

Ainsi, avec

$$S_i(v) = V_i\left(\frac{m}{2}V^2 - \frac{d+2}{2}kT\right) \qquad (30)$$

$$A_i(v) = \frac{V_i}{2}\frac{\partial}{\partial V_j}\left(V_j f^{(0)}\right) - \frac{kT}{m}\frac{\partial f^{(0)}}{\partial V_i} = \frac{V_i}{2}\left[d f^{(0)} + V_j\frac{\partial f^{(0)}}{\partial V_j}\right] - \frac{kT}{m}\frac{\partial f^{(0)}}{\partial V_i}, \qquad (31)$$

il vient :

$$\frac{1}{dT}\int_{\mathbb{R}^d} dv\, S_i(v) A_i(v)$$

$$= \frac{1}{dT}\int_{\mathbb{R}^d} dv\, S_i(v)\frac{V_i}{2} d f^{(0)} + \underbrace{\frac{1}{dT}\int_{\mathbb{R}^d} dv\, S_i(v)\frac{V_i}{2}V_j\frac{\partial f^{(0)}}{\partial V_j}} - \underbrace{\frac{1}{dT}\int_{\mathbb{R}^d} dv\,\frac{kT}{m}S_i(v)\frac{\partial f^{(0)}}{\partial V_i}}$$

$$= \frac{1}{2dT}\int_{\mathbb{R}^d} dv\, S_i(v)V_iV_j\frac{\partial f^{(0)}}{\partial V_j} \qquad\qquad = -\frac{kT}{dTm}\int_{\mathbb{R}^d} dv\, S_i(v)\frac{\partial}{\partial V_i}f^{(0)}$$

$$= -\frac{1}{2dT}\int_{\mathbb{R}^d} dv\,\frac{\partial}{\partial V_j}\left(S_i(v)V_iV_j\right)f^{(0)} + 0 \qquad\qquad = \frac{kT}{dTm}\int_{\mathbb{R}^d} dv\,\frac{\partial S_i(v)}{\partial V_i}f^{(0)} + 0$$

$$= \frac{d}{2dT}\int_{\mathbb{R}^d} dv\, S_i(v) f^{(0)}V_i - \frac{1}{2dT}\int_{\mathbb{R}^d} dv\, f^{(0)}\underbrace{\frac{\partial}{\partial V_j}\left[S_i(v)V_iV_j\right]} + \frac{kT}{dTm}\int_{\mathbb{R}^d} dv\, f^{(0)}\frac{\partial S_i(v)}{\partial V_i}$$

$$= \frac{\partial S_i(v)}{\partial V_j}V_iV_j + S_i(v)V_j\delta_{ij} + S_i(v)V_i\cdot d$$

$$= \frac{d}{2dT}\int_{\mathbb{R}^d} dv\, S_i(v) f^{(0)}V_i - \frac{1}{2dT}\int_{\mathbb{R}^d} dv\, f^{(0)}V_iV_j\frac{\partial S_i(v)}{\partial V_j} - \frac{1}{2dT}\int_{\mathbb{R}^d} dv\, f^{(0)}S_i(v)V_i - \frac{d}{2dT}\int_{\mathbb{R}^d} dv\, f^{(0)}S_i(v)V_i$$

$$+ \frac{kT}{dTm}\int_{\mathbb{R}^d} dv\, f^{(0)}\frac{\partial S_i(v)}{\partial V_i}$$

$$= -\frac{1}{2dT}\int_{\mathbb{R}^d} dv\, f^{(0)}S_i(v)V_i - \frac{1}{2dT}\int_{\mathbb{R}^d} dv\, f^{(0)}V_iV_j\frac{\partial S_i(v)}{\partial V_j} + \frac{2kT}{2dTm}\int_{\mathbb{R}^d} dv\, f^{(0)}\frac{\partial S_i(v)}{\partial V_i} \qquad (32)$$

Avec :

$$\frac{\partial S_i(v)}{\partial V_j} = \delta_{ij}\left(\frac{m}{2}V^2 - \frac{d+2}{2}kT\right) + V_i\frac{m}{2}\underbrace{\frac{\partial}{\partial V_j}V_kV_k}_{=2V_k\delta_{kj}} = \delta_{ij}\left(\frac{m}{2}V^2 - \frac{d+2}{2}kT\right) + mV_iV_j \qquad (32a)$$

$$\frac{\partial S_i(v)}{\partial V_i} = d\cdot\left(\frac{m}{2}V^2 - \frac{d+2}{2}kT\right) + V_i\cdot\frac{m}{2}\underbrace{\frac{\partial}{\partial V_i}V_kV_k}_{=2V_k\delta_{ik}} = d\left(\frac{m}{2}V^2 - \frac{d+2}{2}kT\right) + mV^2 \qquad (32b)$$

$$= m\frac{d+2}{2}V^2 - \frac{d(d+2)}{2}kT$$

$$S_i(v)V_i = V_iV_i\left(\frac{m}{2}V^2 - \frac{d+2}{2}kT\right) = \frac{m}{2}V^4 - \frac{d+2}{2}kTV^2 \qquad (32c)$$

$$V_iV_j\frac{\partial S_i(v)}{\partial V_j} = V_iV_j\delta_{ij}\left(\frac{m}{2}V^2 - \frac{d+2}{2}kT\right) + m V_iV_jV_iV_j = \frac{m}{2}V^4 - \frac{d+2}{2}kTV^2 + mV^4 \qquad (32d)$$

$$= \frac{3}{2}mV^4 - \frac{d+2}{2}kTV^2$$

Ainsi (32) devient :

$$= +\frac{1}{2dT}\int_{\mathbb{R}^d} dv\, f^{(0)}\Bigg[\underbrace{-\frac{m}{2}V^4}_{-2mV^4} + \underbrace{\frac{d+2}{2}kTV^2}_{2(d+2)kTV^2} - \frac{3}{2}mV^4 + \frac{d+2}{2}kTV^2 + \frac{2kT}{m}m\frac{d+2}{2}V^2 - \underbrace{\frac{2kT}{m}\frac{d(d+2)}{2}kT}_{-d(d+2)\frac{(kT)^2}{m}}\Bigg]$$

$$= \frac{1}{2dT}\int_{\mathbb{R}^d} dv\, f^{(0)}\left[-2mV^4\right] + \frac{1}{2dT}\int_{\mathbb{R}^d} dv\, f^{(0)}\left[2(d+2)kTV^2\right] + \frac{1}{2dT}\int_{\mathbb{R}^d} dv\, f^{(0)}\left[-d(d+2)\frac{(kT)^2}{m}\right]$$

$$= -\frac{m}{dT}\int_{\mathbb{R}^d} dv\, V^4 f^{(0)} + \frac{d+2}{d}k\int_{\mathbb{R}^d} dv\, V^2 f^{(0)} - \frac{d+2}{2T}\frac{(kT)^2}{m}\int_{\mathbb{R}^d} dv\, f^{(0)}$$

$$= -\frac{m}{dT}\frac{d(d+2)}{4}\left(\frac{2}{\beta m}\right)^2 n\Bigg[\underbrace{\frac{4}{d(d+2)}\left(\frac{\beta m}{2}\right)^2\frac{1}{n}\int_{\mathbb{R}^d} dv\, V^4 f^{(0)} - 1}_{\overset{(29)}{=}\ a_2} + 1\Bigg] + \frac{d+2}{d}k\int_{\mathbb{R}^d} dv\, V^2 f^{(0)} - \frac{d+2}{2}\frac{k}{\beta m}\int_{\mathbb{R}^d} dv\, f^{(0)}$$

$$= -\frac{m}{dT}d(d+2)\frac{n}{\beta^2 m^2}\frac{1}{2}\left[2a_2+2\right] + \frac{d+2}{d}k\int_{\mathbb{R}^d} dv\, V^2 f^{(0)} - \frac{d+2}{2}\frac{k}{\beta m}\underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} dv\, f^{(0)}}_{=\,n \text{ car } \langle c^0\rangle = 1}$$

$$= -\frac{d+2}{2}\frac{nk_B}{m\beta}\left[2a_2+2\right] - \frac{d+2}{2}\frac{nk_B}{m\beta} + \frac{d+2}{d}k\underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} dc\left(\frac{\beta m}{2}\right)^{-d/2} c^2\left(\frac{\beta m}{2}\right)^{-1}\frac{n}{V_T^d}\tilde{f}^{(0)}(c)}_{\overset{V_T=\sqrt{2/\beta m}}{=}\ \frac{2n}{\beta m}\underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} dc\, c^2\tilde{f}^{(0)}(c)}_{=\,\langle c^2\rangle = d/2}}$$

$$= -\frac{d+2}{2}\frac{nk_B}{m\beta}\left[2a_2+2\right] - \frac{d+2}{2}\frac{nk_B}{m\beta} + \frac{d+2}{d}k\frac{2n}{\beta m}\frac{d}{2}$$

$$= -\frac{d+2}{2}\frac{nk_B}{m\beta}\left[2a_2+2\right] \underbrace{- \frac{d+2}{2}\frac{nk_B}{m\beta} + \frac{d+2}{2}\frac{nk_B}{m\beta}\cdot 2}_{=\ \frac{d+2}{2}\frac{nk_B}{m\beta}}$$

$$= -\frac{d+2}{2}\frac{nk_B}{m\beta}\left[2a_2+1\right] \qquad (33)$$

Dans la littérature on note parfois $c^* = 2a_2$. De même avec

$$B_i(V) = -V_i f^{(0)} - \frac{kT}{m}\frac{\partial f^{(0)}}{\partial V_i}$$

il vient :

$$\frac{1}{dn}\int_{\mathbb{R}^d} dv\, S_i(V)B_i(V) = -\frac{1}{dn}\int_{\mathbb{R}^d} dv\, S_i(V)V_i f^{(0)} - \frac{1}{dn}\frac{kT}{m}\underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} dv\, S_i(V)\frac{\partial f^{(0)}}{\partial V_i}}_{=\ -\int_{\mathbb{R}^d} dv\,\frac{\partial S_i(V)}{\partial V_i}f^{(0)} + \underbrace{S_i(V)f^{(0)}\big|_{\partial\Lambda}}_{=0}}$$

$$\overset{(32c)}{\underset{(32b)}{=}} -\frac{1}{dn}\int_{\mathbb{R}^d} dv\, f^{(0)}\left[\frac{m}{2}V^4 - \frac{d+2}{2}kTV^2\right] + \frac{1}{dn}\frac{kT}{m}\int_{\mathbb{R}^d} dv\, f^{(0)}\left[m\frac{d+2}{2}V^2 - \frac{d(d+2)}{2}kT\right]$$

$$= -\frac{1}{dn}\int_{\mathbb{R}^d} dv\, f^{(0)}\frac{m}{2}V^4 + \frac{1}{dn}\frac{d+2}{2}kT\int_{\mathbb{R}^d} dv\, f^{(0)}V^2 + \frac{TK}{ndm}m\frac{d+2}{2}\int_{\mathbb{R}^d} dv\, f^{(0)}V^2 - \frac{1}{dn}\frac{kT}{m}\frac{d(d+2)}{2}kT\int_{\mathbb{R}^d} dv\, f^{(0)}$$

$$= -\frac{m}{2dn}\int_{\mathbb{R}^d} dv\, V^4 f^{(0)} + \frac{T}{n}\frac{d+2}{d}k\underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} dv\, f^{(0)}V^2}_{=\ \frac{2n}{\beta m}\frac{d}{2}} - \frac{Tk^2T(d+2)}{n\,2m}\underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} dv\, f^{(0)}}_{=\,n}$$

$$= -\frac{m}{2dn}\frac{d(d+2)}{4}\left(\frac{2}{\beta m}\right)^2 n\Bigg[\underbrace{\frac{4}{d(d+2)}\left(\frac{\beta m}{2}\right)^2\frac{1}{n}\int_{\mathbb{R}^d} dv\, V^4 f^{(0)} - 1}_{=\ a_2} + 1\Bigg] + \frac{T}{n}\frac{d+2}{d}k\frac{d\,n}{\beta m} - \frac{k\,n}{2m\beta}(d+2)\frac{T}{n}$$

$$= -\frac{m}{2n}(d+2)\frac{n}{\beta^2 m^2}\frac{1}{2}\left[2a_2+2\right] + \frac{d+2}{2}\frac{1}{\beta m}\cdot 2 - \frac{d+2}{2}\frac{1}{\beta m}$$

$$= - \frac{d+2}{2}\frac{1}{\beta m}\left[a_2+1\right] + \frac{d+2}{2}\frac{1}{\beta m}$$

$$= - \frac{d+2}{2}\frac{1}{\beta m}\, a_2 \qquad (34)$$

Ainsi en résumé, des Eqs. (22), (27), (33), et (34) nous avons obtenu :

$$\mathcal{K} = \frac{1}{\nu_{\mathcal{K}} - 2p\,\xi_T^{(0)}}\left[\frac{1}{2}p\,\xi_n^{(0)}\frac{n}{T}\mu + \frac{d+2}{2}\frac{n k_B}{m\beta}(2a_2+1)\right] \qquad (35)$$

$$\mu = \frac{1}{\nu_\mu - \frac{3}{2}p\,\xi_T^{(0)} - p\,\xi_n^{(0)}}\left[p\,\xi_T^{(0)}\frac{T}{n}\mathcal{K} + \frac{d+2}{4}\frac{1}{\beta^2 m}2\cdot a_2\right] \qquad (36)$$

Introduisons la conductivité thermique $\mathcal{K}_0$ du gaz de sphères dures $p=0$, définie par [11]

$$\mathcal{K}_0 = \frac{d(d+2)}{2(d-1)}\frac{k_B}{m}\eta_0 \,, \qquad \eta_0 = \frac{p^{(0)}}{\nu_0} \,, \quad p^{(0)} = n k_B T$$

alors :

$$\frac{n\mu}{T\mathcal{K}_0} = \frac{n}{T}\frac{2(d-1)}{d(d+2)}\frac{m}{k_B}\frac{\nu_0}{p^{(0)}}\frac{1}{\nu_\mu - \frac{3}{2}p\,\xi_T^{(0)} - p\,\xi_n^{(0)}}\left[p\,\xi_T^{(0)}\frac{T}{n}\mathcal{K} + \frac{d+2}{4}\frac{1}{\beta^2 m}2a_2\right]$$

$$= \frac{2}{2\nu_\mu^* - 3p\,\xi_T^{(0)*} - p\,\xi_n^{(0)*}\cdot 2}\left[p\frac{2(d-1)}{d(d+2)}\frac{m}{k_B}\frac{1}{p^{(0)}}\frac{\xi_T^{(0)}}{\nu_0}\frac{\mathcal{K}}{\mathcal{K}_0}\cdot\nu_0\cdot\mathcal{K}_0 + \frac{n}{T}\frac{2(d-1)}{d(d+2)}\frac{m}{k_B}\frac{1}{p^{(0)}}\frac{d+2}{4}\frac{1}{\beta^2 m}2a_2\right]$$

$$= \frac{2}{2\nu_\mu^* - 3p\,\xi_T^{(0)*} - 2p\,\xi_n^{(0)*}}\left[p\frac{2(d-1)}{d(d+2)}\frac{m}{k_B}\frac{1}{p^{(0)}}\frac{d(d+2)}{2(d-1)}\frac{k_B}{m}\frac{p^{(0)}}{\nu_0}\cdot\nu_0\,\xi_T^{(0)*}\frac{\mathcal{K}}{\mathcal{K}_0} + \frac{n}{T}\frac{2(d-1)}{d(d+2)}\frac{m}{k_B}\frac{1}{n k_B T}\frac{d+2}{4}\frac{k_B^2 T^2}{m}2a_2\right]$$

$$= \frac{2}{2\nu_\mu^* - 3p\,\xi_T^{(0)*} - 2p\,\xi_n^{(0)*}}\left[p\,\xi_T^{(0)*}\frac{\mathcal{K}}{\mathcal{K}_0} + \frac{d-1}{2d}2a_2\right] \qquad (37)$$

$$\frac{\mathcal{K}}{\mathcal{K}_0} = \frac{2(d-1)}{d(d+2)}\frac{m}{k_B}\frac{\nu_0}{p^{(0)}}\frac{1}{\nu_{\mathcal{K}} - 2p\,\xi_T^{(0)}}\left[\frac{1}{2}p\,\xi_n^{(0)}\frac{n}{T}\mu + \frac{d+2}{2}\frac{n k_B}{m\beta}(2a_2+1)\right]$$

$$= \frac{1}{\nu_{\mathcal{K}}^* - 2p\,\xi_T^{(0)*}}\left[p\,\frac{1}{2}\frac{2(d-1)}{d(d+2)}\frac{m}{k_B}\frac{1}{p^{(0)}}\frac{\xi_n^{(0)}}{\nu_0}\frac{n\mu}{T\mathcal{K}_0}\mathcal{K}_0\nu_0 + \frac{d+2}{2}\frac{n k_B}{m\beta}\frac{2(d-1)}{d(d+2)}\frac{m}{k_B}\frac{1}{p^{(0)}}(2a_2+1)\right]$$

$$= \frac{1}{\nu_{\mathcal{K}}^* - 2p\,\xi_T^{(0)*}}\left[p\,\frac{1}{2}\frac{2(d-1)}{d(d+2)}\frac{m}{k_B}\frac{1}{p^{(0)}}\frac{d(d+2)}{2(d-1)}\frac{k_B}{m}\frac{p^{(0)}}{\nu_0}\nu_0\,\xi_n^{(0)*}\frac{n\mu}{T\mathcal{K}_0} + \frac{d+2}{2}\frac{n k_B}{m}k_B T\frac{2(d-1)}{d(d+2)}\frac{m}{k_B\, n k_B T}(2a_2+1)\right]$$

$$= \frac{1}{\nu_{\mathcal{K}}^* - 2p\,\xi_T^{(0)*}}\left[\frac{1}{2}p\,\xi_n^{(0)*}\frac{n\mu}{T\mathcal{K}_0} + \frac{d-1}{d}(2a_2+1)\right] \qquad (38)$$

Résumons ce que l'on a obtenu :

$$\eta^* = \frac{\eta}{\eta_0} = \frac{1}{\nu_\eta^* - \frac{1}{2} p \zeta_T^{(0)*}}$$

$$\kappa^* = \frac{\kappa}{\kappa_0} = \frac{1}{\nu_\kappa^* - 2p\zeta_T^{(0)*}} \left[\frac{1}{2} p \zeta_n^{(0)*} \mu^* + \frac{d-1}{d}(2a_2+1) \right]$$

$$\mu^* = \frac{n\mu}{T\kappa_0} = \frac{2}{2\nu_\mu^* - 3p\zeta_T^{(0)*} - 2p\zeta_n^{(0)*}} \left[p\zeta_T^{(0)*} \kappa^* + \frac{d-1}{2d} 2a_2 \right]$$

$$\nu_\eta^* = \nu_\eta/\nu_0 \; ; \; \nu_\kappa^* = \nu_\kappa/\nu_0 \; ; \; \nu_\mu^* = \nu_\mu/\nu_0 \; ; \; \zeta_T^{(0)*} = \zeta_T^{(0)}/\nu_0 \; ; \; \zeta_n^{(0)*} = \zeta_n^{(0)}/\nu_0$$

$$\kappa_0 = \frac{d(d+2)}{2(d-1)} \frac{k_B}{m} \eta_0 \; ; \; \eta_0 = \frac{p^{(0)}}{\nu_0} \; ; \; p^{(0)} = nk_BT \; ; \; \eta_0 = \frac{d+2}{8} \frac{\Gamma(d/2)}{\pi^{\frac{d-1}{2}}} \frac{\sqrt{mk_BT}}{\sigma^{d-1}}$$

$$\nu_\eta = \frac{\int_{\mathbb{R}^d} dv \, D_{ij}(v) \, J^{-p\Omega} Z_{ij}}{\int_{\mathbb{R}^d} dv \, D_{ij}(v) Z_{ij}} \; ; \; \nu_\kappa = \frac{\int_{\mathbb{R}^d} dv \, S_i(v) \, J^{-p\Omega} \mathcal{A}_i}{\int_{\mathbb{R}^d} dv \, S_i(v) \mathcal{A}_i} \; ; \; \nu_\mu = \frac{\int_{\mathbb{R}^d} dv \, S_i(v) \, J^{-p\Omega} \mathcal{B}_i}{\int_{\mathbb{R}^d} dv \, S_i(v) \mathcal{B}_i}$$

A nouveau, on peut constater que dans la limite $p \to 0$ on retrouve les résultats connus dans le cas élastique (ou bien avec l'analogie formelle $p = 1$ et $\zeta_n^{(0)} = 0$) [3]. L'évaluation des relations pour ν_η, ν_κ, et ν_μ fait intervenir des relations intégrales qu'il ne sera pas possible de calculer sans approximation supplémentaire.

Brey : preuve de la nullité de $\zeta^{(1)}$:

Calcul explicite avec les symétries

Périmé

Par définition, Eq. (11) ; (25) :

$$\zeta^{(1)} = (1-\alpha^2)\frac{4}{3nkT}\,\omega[f^{(0)}, f^{(1)}] \quad ; \quad \omega[f,h] = \frac{m\pi\sigma^2}{16}\int dv_1 \int dv_2\, |v_1 - v_2|^3 f(r, v_1; t)\, h(r, v_2; t)$$

$$\Longrightarrow \zeta^{(1)} \sim \int dv_1 \int dv_2\, |v_1-v_2|^3 f^{(0)}(r, v_1; t) f^{(1)}(r, v_2; t)$$

Or :

$$f^{(1)} = \mathcal{A}_i \nabla_i \ln T + \mathcal{B}_i \nabla_i \ln(n) + \mathcal{C}_{ij} \nabla_i u_j$$

Dans l'équation pour $\zeta^{(1)}$ il vient :

$$\zeta^{(1)} \sim \int dv_1 \int dv_2\, |v_1-v_2|^3 \mathcal{A}_i(V_1) f^{(0)}(V_2)\, \nabla_i \ln(T) + \int dv_1 \int dv_2\, |v_1-v_2|^3 \mathcal{B}_i(V_1) f^{(0)}(V_2)\, \nabla_i \ln(n)$$

$$+ \int dv_1 \int dv_2\, |v_1-v_2|^3 \mathcal{C}_{ij}(V_1) f^{(0)}(V_2)\, \nabla_i u_j$$

Les propriétés de symétries des $A_i, \mathcal{A}_i$; $B_i, \mathcal{B}_i$; $C_{ij}, \mathcal{C}_{ij}$, doivent être les mêmes. On remarque ainsi que

$$A(V) = -A(-V)$$
$$B(V) = -B(-V)$$
$$C_{ii}(V) = C_{ii}(-V) \quad ; \quad Tr(C) = 0$$
$$C_{ij}(V) = C_{ij}(-V)$$

de même pour $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$

Ainsi :

$$\zeta^{(1)} \sim \underbrace{\int dv_1 \int dv_2\, |v_1-v_2|^3 \mathcal{A}_i(V_1) f^{(0)}(V_2)\, \nabla_i \ln(T)} + \underbrace{\int dv_1 \int dv_2\, |v_1-v_2|^3 \mathcal{B}_i(V_1) f^{(0)}(V_2)\, \nabla_i \ln(n)}_{\text{idem} : =0}$$

$V_1 \to -V_1$, $V_2 \to -V_2$

$$= \int dv_1 \int dv_2\, |v_1-v_2|^3 \underbrace{\mathcal{A}_i(-V_1)}_{=-\mathcal{A}(V_1)} f^{(0)}(V_2)\, \nabla_i \ln(T)$$

$$= - \int dv_1 \int dv_2\, |v_1-v_2|^3 \mathcal{A}(V_1) f^{(0)}(V_2)\, \nabla_i \ln(T)$$

$$\Longrightarrow = 0 \quad (a = -a \Rightarrow a = 0)$$

$$+ \underbrace{\int dv_1 \int dv_2\, |v_1-v_2|^3 \mathcal{C}_{ij}(V_1) f^{(0)}(V_2)}\, \nabla_i (u_1)_j \quad ; \quad V = \frac{v-u}{v_T} = \frac{\bar{V}}{v_T}$$

inversion spatiale d'une des coordonnées :

$$C_{ij}(-V_1, V_2, V_3) = -C_{ij}(V) \text{ et idem pour } \mathcal{C}_{ij} \quad \forall i \neq j$$

ainsi : $\mathcal{C}_{ij}(\tilde{V}_1^*) = -\mathcal{C}_{ij}(V_1)$, où $V_1^* = (V_{1\alpha}, V_{1\beta}, V_{1\gamma})$ ↻ (permutations cycliques)

en faisant l'inversion spatiale d'une des composantes de V_1 et V_2 (la même composante) on a :

$$= \int dv_1 \int dv_2\, |v_1-v_2|^3 \mathcal{C}_{ij}(V_1) f^{(0)}(V_2) \Big|_{i\neq j}^{\nabla_i u_j} + \sum_{ii} \int dv_1 \int dv_2\, |v_1-v_2|\, \mathcal{C}_{ii}\, f^{(0)}(v_2)\, \nabla_i (u_1)_j$$

$V_1 \to (-V_{11}, V_{12}, V_{13})$, $V_2 \to (-V_{21}, V_{22}, V_{23})$

$$\int dv_1 \int dv_2\, |v_1-v_2|^3 (-) \mathcal{C}_{ij}(V_1) f^{(0)}(V_2)$$

$$\Longrightarrow = 0$$

$$\Longrightarrow \zeta^{(1)} \sim \sum_{i=1}^{3} \left[\int dv_a \int dv_b\, |v_a - v_b|\, \underbrace{\mathcal{C}_{ii}^{(V_1)}} f^{(0)}(v_b)\right] \nabla_i (u_a)_i = \sum_{i=1}^{d} T_{ii} \nabla_i (u_a)_i$$

$$= \partial_{V_i}(V_i f^{(0)}) - \frac{1}{d}\sum_{j=1}^{d} \partial_{V_j} f^{(0)}$$

~~Par exemple, soit la rotation de $+\pi/2$ autour de l'axe e_z $R_z^{\pi/2}$; $V_a' = R_z^{\pi/2} V_a$, $V_b' = R_z^{\pi/2} V_b$~~

~~$dv_a dv_b = J\, dv_a' dv_b' = dv_a' dv_b'$, alors :~~

~~$\int dv_a dv_b |v_a - v_b| \mathcal{C}_{11}(V_1) f^{(0)}(v_b) = \int dv_a' dv_b' |v_a' - v_b'| \left[\frac{\partial}{\partial V_1'}(V_1' f^{(0)}(V_1')) - \frac{1}{d}\sum_{j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial V_j'} f^{(0)}(V_1')\right]$~~

~~$= \frac{1}{R^{-1}} \frac{\partial}{\partial V_1}(R^{-1} V_1 f^{(0)}(V_1))$~~

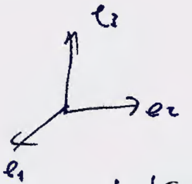
~~$= \frac{\partial}{\partial V_1}(V_1 f^{(0)}(V_1))$~~

~~Mais aussi : $= \frac{\partial}{\partial V_2}(V_2 f^{(0)}(V_2))$~~

$i=1$: $\int dv_a dv_b |v_a - v_b| \, \Sigma_{11}(v_a) \, f^{(0)}(v_b)$ ~~$= \int dv_a \int dv_b |v_a - v_b| \frac{\partial}{\partial v_{a1}} \left(v_{a1} f^{(0)}(v_a) \right) f^{(0)}(v_b) - \frac{1}{d} \sum_{j=1}^{d} \int dv_a \int dv_b |v_a - v_b| \left(\frac{\partial}{\partial v_j} v_j f^{(0)}(v_a) \right) f^{(0)}(v_b)$~~

$$= \int dv_a \int dv_b |v_a - v_b| \left[\frac{\partial}{\partial v_{a1}} \left(v_{a1} f^{(0)}(v_a) \right) f^{(0)}(v_b) - \frac{1}{d} \sum_{j=1}^{d} \left(\frac{\partial}{\partial v_{aj}} v_{aj} f^{(0)}(v_a) \right) f^{(0)}(v_b) \right]$$

Soit la rotation de $+\pi/2$ autour de l'axe $\hat{e}_z$ $R_z^{\pi/2}$, soit $v_a' = R_z^{\pi/2} v_a$; $v_b' = R_z^{\pi/2} v_b$, alors $dv_a dv_b = dv_a' dv_b'$, en particulier :



$$v_a = (v_{a1}, v_{a2}, v_{a3}) \quad ; \quad v_a' = R_z^{\pi/2} v_a = (v_{a2}, -v_{a1}, v_{a3})$$
$$v_b' = R_z^{\pi/2} v_b = (v_{b2}, -v_{b1}, v_{b3})$$

alors comme la transformation est isométrique (on ne la fait que sur le premier terme, puis rajoute le second terme)

$$= \int dv_a \int dv_b |v_a - v_b| \left[\frac{\partial}{\partial v_{a2}} \left(v_{a2} f^{(0)}(v_a) \right) f^{(0)}(v_b) - \frac{1}{d} \sum_{j=1}^{d} \left(\frac{\partial}{\partial v_{aj}} v_{aj} f^{(0)}(v_a) \right) f^{(0)}(v_b) \right]$$

$$= \int dv_a \int dv_b |v_a - v_b| \, \Sigma_{22}(v_a) \, f^{(0)}(v_b)$$

$\Longrightarrow \quad T_{11} = T_{22}$

et de même avec les autres composantes. Ainsi $T_{ii} = T_{jj} := T \; \forall i, j$. De plus, comme

$$Tr(\Sigma) = 0$$

alors

$$Tr(T) = 0$$

$$\Longrightarrow 0 = \sum_{i=1}^{d} T_{ii} = d \cdot T \quad \Longrightarrow \quad T = 0$$

<u>Conclusion</u> : $T \equiv 0 \quad \Longrightarrow \quad \zeta^{(1)} = 0$, i.e. $\omega[f^{(0)}, f^{(1)}]$

<u>Résumé</u> : – la nullité des coefficients de $\nabla_i \ln(T)$ et $\nabla_i \ln(n)$ est assurée par le fait que $A_i(V)$ et $B_i(V)$ sont antisymétriques. (donc $\mathcal{A}_i$ et $\mathcal{B}_i$)

– la nullité des coefficients de $\nabla_i u_j$ est assurée par le fait que la forme de $C_{ij}(V)$ est invariante par rotation (donc Σ_{ij})

<u>Extension à notre cas</u> :

3.3.2. Développement en polynômes de Sonine

Pour poursuivre, nous avons besoin de l'expression explicite de $f^{(0)}$ pour calculer les taux de déclin. Dans le contexte du développement de Sonine à l'ordre a_2, ceci a été fait et le résultat est [12] :

$$\tilde{f}^{(0)}(c) = \mathcal{M}(c)\left[1 + a_2 S_2(c^2)\right]$$
$$\mathcal{M}(c) = \frac{1}{\pi^{d/2}} e^{-c^2}$$
$$S_2(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{d+2}{2}x + \frac{d(d+2)}{8}$$
$$c = v/v_T$$
$$v_T = \sqrt{2/m\beta}$$
$$a_2 = 8\,\frac{3-2\sqrt{2}}{4d+6-\sqrt{2}+\frac{1-p}{p}8\sqrt{2}(d-1)}$$
$$f^{(0)}(v) = \frac{n}{v_T^d}\tilde{f}^{(0)}(c)$$

On a donc :

$$f^{(0)}(v) = \frac{n}{v_T^d}\mathcal{M}(v/v_T)\left[1 + a_2\left\{\frac{1}{2}\frac{v^4}{v_T^4} - \frac{d+2}{2}\frac{v^2}{v_T^2} + \frac{d(d+2)}{8}\right\}\right] \qquad (1)$$

Ceci permet de calculer les taux de déclin, en négligeant les termes non linéaires en a_2. Pour cela, on aura besoin du résultat suivant.

<u>Lemme</u> : soit

$$M^0_{np} = \int_{\mathbb{R}^{2d}} dc_{12}\,dc\, e^{-1/2\, c_{12}^2} e^{-2c^2} c_{12}^n c^p \qquad (2)$$

$$M_{np} = \int_{\mathbb{R}^{2d}} dc_{12}\,dc\, e^{-1/2\, c_{12}^2} e^{-2c^2} c_{12}^n c^p \left[1 + a_2\left\{c^4 + \frac{1}{16}c_{12}^4 + \frac{d+2}{2d}c^2 c_{12}^2 - (d+2)c^2 - \frac{d+2}{4}c_{12}^2 + \frac{d(d+2)}{4}\right\}\right], \qquad (3)$$

alors :

$$M^0_{np} = \pi^d\, 2^{\frac{n-p}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{d+n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{d+p}{2}\right)}{\Gamma(d/2)^2}, \qquad (4)$$

$$\frac{M_{np}}{M^0_{np}} = 1 + \frac{a_2}{16d}\left[d(n^2+p^2) - 2d(n+p) + 2np(d+2)\right]. \qquad (5)$$

<u>Preuve</u> : pour calculer ces intégrales, on utilise la relation générale

$$\int_{\mathbb{R}^d} dx\, |x|^n e^{-\alpha x^2} = \frac{\pi^{d/2}}{\alpha^{\frac{d+n}{2}}}\frac{\Gamma\left(\frac{d+n}{2}\right)}{\Gamma(d/2)}. \qquad (6)$$

Ainsi :

$$M^0_{np} = \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} dc_{12}\, c_{12}^n e^{-1/2\, c_{12}^2}}_{= \frac{\pi^{d/2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{d+n}{2}}}\frac{\Gamma\left(\frac{d+n}{2}\right)}{\Gamma(d/2)}} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} dc\, c^p e^{-2c^2}}_{= \frac{\pi^{d/2}}{2^{\frac{d+p}{2}}}\frac{\Gamma\left(\frac{d+p}{2}\right)}{\Gamma(d/2)}} = \pi^d\, 2^{\frac{n-p}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{d+n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{d+p}{2}\right)}{\Gamma(d/2)^2}.$$

Donc :

$$M_{np} = M^0_{np} + a_2\left(M^0_{n,p+4} + \frac{1}{16}M^0_{n+4,p} + \frac{d+2}{2d}M^0_{n+2,p+2} - (d+2)M^0_{n,p+2} - \frac{d+2}{4}M^0_{n+2,p} + \frac{d(d+2)}{4}M^0_{np}\right), \qquad (7)$$

avec :

$$M^0_{n,p+4} = \int_{\mathbb{R}^d} dc_{12}\, c_{12}^n e^{-1/2\, c_{12}^2} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} dc\, c^{p+4} e^{-2c^2}}_{= \frac{\pi^{d/2}}{2^{\frac{d+p}{2}}2^{4/2}}\frac{\Gamma\left(\frac{d+p+4}{2}\right)}{\Gamma(d/2)}} = \int_{\mathbb{R}^d} dc_{12}\, c_{12}^n e^{-\frac{1}{2}c_{12}^2}\frac{\pi^{d/2}}{2^{\frac{d+p}{2}}}\frac{1}{2^2}\frac{d+p+2}{2}\frac{d+p}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{d+p}{2}\right)}{\Gamma(d/2)} = \frac{(d+p)(d+p+2)}{16}M^0_{np} \qquad (8)$$

$$M^0_{n+4,p} = M^0_{n,p}\frac{d+n+2}{2}\frac{d+n}{2}2^{4/2} = (d+n)(d+n+2)M^0_{np} \qquad (9)$$

$$M^0_{n+2,p+2} = M^0_{np}\frac{d+n}{2}2^{2/2}\frac{d+p}{2}2^{-2/2} = \frac{(d+n)(d+p)}{4}M^0_{np} \qquad (10)$$

$$M^0_{n+2,p} = M^0_{np}\frac{d+n}{2}2^{2/2} = (d+n)M^0_{np} \qquad (11)$$

$$M^0_{n,p+2} = M^0_{np}\frac{d+p}{2}2^{-2/2} = \frac{d+p}{4}M^0_{np} \qquad (12)$$

(8) à (12) dans (7) $\Rightarrow$

$$\frac{M_{np}}{M^{0}_{np}} = 1 + a_2\left[\frac{(d+p)(d+p+2)}{16} + \frac{(d+n)(d+n+2)}{16} + \frac{d+2}{2d}\frac{(d+n)(d+p)}{4} - (d+2)\frac{d+p}{4} - \frac{d+2}{4}(d+n) + \frac{d(d+2)}{4}\right]$$

$$= 1 + \frac{a_2}{16d}\left[d(d+p)(d+p+2) + d(d+n)(d+n+2) + 2d(d+2)(d+n)(d+p) - 4d(d+2)(d+p) - 4d(d+2)(d+n) + 4d^2(d+2)\right]$$

$$= 1 + \frac{a_2}{16d}\Big[d\left\{d^2+dp+2d+pd+p^2+2p+d^2+dn+2d+nd+n^2+2n\right\}$$
$$+ 2(d+2)\left\{d^2+dp+nd+np\right\} - d\left(4d^2+4dp+8d+8p\right) - d\left(4d^2+4dn+8d+8n\right)$$
$$+ d\left(4d^2+8d\right)\Big]$$

$$= 1 + \frac{a_2}{16d}\Big[2d\left(d^2+dp+nd+np\right) + 4d^2+4dp+4nd+4np$$
$$+ d\left\{-2d^2 - 2dp - 4d + p^2 - 6p - 2dn + n^2 - 6n\right\}\Big]$$

$$= 1 + \frac{a_2}{16d}\Big[2d^3 + 2d^2p + 2d^2n + 2dnp + 4d^2 + 4dp + 4nd + 4np$$
$$- 2d^3 - 2d^2p - 4d^2 + p^2d - 6pd - 2d^2n + dn^2 - 6dn\Big]$$

$$= 1 + \frac{a_2}{16d}\left(d(n^2+p^2) - 2dp - 2dn + 2dnp + 4np\right)$$

$$= 1 + \frac{a_2}{16d}\left[d(n^2+p^2) - 2d(n+p) + 2np(d+2)\right]$$

ce qui est bien le résultat cherché et par conséquent achève la preuve. ■

Taux de déclin de densité:

$$\zeta_n^{(0)*} = \frac{\zeta_n^{(0)}}{\nu_0} = \frac{1}{\nu_0}\frac{1}{n}\omega\left[f^{(0)}, f^{(0)}\right] = \frac{\varphi_0}{p^{(0)}}\frac{1}{n}\sigma^{d-1}\beta_1\int_{\mathbb{R}^{2d}} dV_1 dV_2\, |V_1 - V_2|\, f^{(0)}(V_1) f^{(0)}(V_2)$$

$$= \frac{\varphi_0}{p^{(0)}}\frac{1}{n}\sigma^{d-1}\frac{\beta_1}{\pi^d}\frac{n^2}{V_T^{2d}}\int_{\mathbb{R}^{2d}} dV_1 dV_2\, |V_1 - V_2|\, e^{-V_1^2/V_T^2} e^{-V_2^2/V_T^2}\left[1 + a_2\left(\tfrac{1}{2}V_1^4/V_T^4 - \tfrac{d+2}{2}V_1^2/V_T^2 + \tfrac{d(d+2)}{8}\right)\right]$$
$$\times\left[1 + a_2\left(\tfrac{1}{2}V_2^4/V_T^4 - \tfrac{d+2}{2}V_2^2/V_T^2 + \tfrac{d(d+2)}{8}\right)\right] \quad (13)$$

Soit $c_1 = V_1/V_T$; $c_2 = V_2/V_T$, $dc_1dc_2 = dV_1dV_2/V_T^{2d}$, alors :

$$\zeta_n^{(0)*} = \frac{\varphi_0}{p^{(0)}}\frac{1}{n}\sigma^{d-1}\frac{\beta_1}{\pi^d}\frac{n^2}{V_T^{2d}}V_T^{2d}\int_{\mathbb{R}^{2d}} dc_1 dc_2\, V_T\, |c_1 - c_2|\, e^{-c_1^2} e^{-c_2^2}\left[1 + a_2\left(\tfrac{1}{2}c_1^4 - \tfrac{d+2}{2}c_1^2 + \tfrac{d(d+2)}{8}\right)\right]$$
$$\times\left[1 + a_2\left(\tfrac{1}{2}c_2^4 - \tfrac{d+2}{2}c_2^2 + \tfrac{d(d+2)}{8}\right)\right]$$

$$= \frac{\varphi_0}{p^{(0)}}\sigma^{d-1}\frac{\beta_1}{\pi^d}n V_T\int_{\mathbb{R}^{2d}} dc_1 dc_2\, |c_1 - c_2|\, e^{-c_1^2} e^{-c_2^2}\left[1 + a_2\left\{\tfrac{1}{2}(c_1^4+c_2^4) - \tfrac{d+2}{2}(c_1^2+c_2^2) + \tfrac{d(d+2)}{4}\right\}\right] + O(a_2^2) \quad (14)$$

Pour calculer cette intégrale, il est utile de passer dans les coordonnées du centre de masse et de la vitesse relative

$$\left.\begin{aligned} c_{12} &= c_1 - c_2 \\ C &= \tfrac{1}{2}(c_1+c_2)\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} c_1 &= C + \tfrac{1}{2}c_{12} \\ c_2 &= C - \tfrac{1}{2}c_{12}\end{aligned}\right. \quad (15)$$

$$dc_1dc_2 = J\,dc_{12}\,dC \;;\; J = \left|\det\begin{pmatrix}\partial_{c_1}c_{12} & \partial_{c_2}c_{12}\\ \partial_{c_1}C & \partial_{c_2}C\end{pmatrix}\right| = \left|\det\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1/2 & 1/2\end{pmatrix}\right| = 1 \quad (16)$$

On a aussi :

$$c_1^2 + c_2^2 = C^2 + \tfrac{1}{4}c_{12}^2 + C\cdot c_{12} + C^2 + \tfrac{1}{4}c_{12}^2 - C\cdot c_{12} = 2C^2 + \tfrac{1}{2}c_{12}^2 \quad (16b)$$

$$c_1^4 + c_2^4 = \left(C + \tfrac{1}{2}c_{12}\right)^4 + \left(C - \tfrac{1}{2}c_{12}\right)^4 = \left(C^2 + \tfrac{1}{4}c_{12}^2 + C\cdot c_{12}\right)^2 + \left(C^2 + \tfrac{1}{4}c_{12}^2 - C\cdot c_{12}\right)^2$$
$$= \left(C^2 + 1/4\,c_{12}^2\right)^2 + (C\cdot c_{12})^2 + 2(C\cdot c_{12})\left(C^2 + 1/4\,c_{12}^2\right)$$
$$+ \left(C^2 + 1/4\,c_{12}^2\right)^2 + (C\cdot c_{12})^2 - 2(C\cdot c_{12})\left(C^2 + 1/4\,c_{12}^2\right)$$

$$= 2C^4 + C_{12}^4/8 + C^2 C_{12}^2 + 2\,(C\cdot C_{12})^2. \qquad (17)$$

On peut simplifier le terme $(C\cdot C_{12})$ grâce à l'isotropie. En effet, si on général $X, Y \in \mathbb{R}^d$ et que l'on désire intégrer $(X\cdot Y)^2$ sur X et Y sur un domaine symétrique avec poids symétrique, alors :

$$(X\cdot Y)^2 = \sum_{i,j=1}^{d} x_i x_j y_i y_j \,\delta_{ij} + \underbrace{\sum_{i,j=1}^{d} x_i x_j y_i y_j\,(1-\delta_{ij})}_{\text{moments impairs : contribution nulle}}$$

$$= \sum_{i=1}^{d} x_i^2 y_i^2$$

$$\overset{\text{isotropie}}{=} \sum_{i=1}^{d} x_i^2 \,\frac{1}{d} \sum_{i=1}^{d} y_i^2$$

$$= \frac{1}{d} \sum_{i=1}^{d} x_i^2 \sum_{j=1}^{d} y_j^2$$

$$= \frac{1}{d} X^2 Y^2 \qquad (18)$$

Les égalités ci-dessus sont donc à interpréter comme valables si on intègre sur X et Y. On a donc $(C_{12}\cdot C)^2 = C^2 C_{12}^2/d$, et (17) devient :

$$C_1^4 + C_2^4 = 2C^4 + C_{12}^4/8 + (1 + 2/d)\, C^2 C_{12}^2 \qquad (19)$$

Insérant (15), (16), (16b), et (19) dans (14), il vient :

$$\zeta_n^{(0)*} = \frac{\eta_0}{p^{(0)}}\,\sigma^{d-1}\frac{\beta_1}{\pi^d}\, n V_T \int_{\mathbb{R}^{2d}} dC_{12}\, dC\, C_{12}\, e^{-2C^2} e^{-C_{12}^2/2}\left[1 + a_2\left\{C^4 + \frac{1}{16}C_{12}^4 + \frac{d+2}{2d}C^2C_{12}^2 - (d+2)C^2 - \frac{d+2}{4}C_{12}^2 + \frac{d(d+2)}{4}\right\}\right]$$

$$= \frac{\eta_0}{p^{(0)}}\,\sigma^{d-1}\frac{\beta_1}{\pi^d}\, n V_T\, M_{10}$$

$$\overset{(5)}{=} \frac{\eta_0}{p^{(0)}}\,\sigma^{d-1}\frac{\beta_1}{\pi^d}\, n V_T\, M_{10}^0 \left(1 + \frac{a_2}{16d}\left[d(1+0) - 2d(1+0) + 0\right]\right)$$

$$= \frac{\eta_0}{p^{(0)}}\,\sigma^{d-1}\frac{\beta_1}{\pi^d}\, n V_T\, M_{10}^0 \left(1 - \frac{1}{32}2a_2\right)$$

$$= \frac{d+2}{8}\,\frac{\cancel{\Gamma(d/2)}}{\cancel{\pi^{\frac{d-1}{2}}}}\,\frac{\sqrt{\cancel{m k_B T}}\;1}{\cancel{\sigma^{d-1}}\cancel{\pi^d}}\,\frac{1}{\cancel{n k_B T}}\,\cancel{\sigma^{d-1}}\,\frac{\cancel{\pi^{\frac{d-1}{2}}}}{\cancel{\Gamma(\frac{d+1}{2})}}\,\cancel{n}\sqrt{\frac{2\cancel{k_B T}}{\cancel{m}}}\,\cancel{\pi^d}\,2^{1/2}\,\frac{\cancel{\Gamma(\frac{d+1}{2})}\,\cancel{\Gamma(d/2)}}{\cancel{\Gamma(d/2)^2}}\left(1 - \frac{1}{32}2a_2\right)$$

$$= \frac{d+2}{8}\,2\left(1 - \frac{1}{32}2a_2\right)$$

$$\boxed{\zeta_n^{(0)*} = \frac{d+2}{4}\left(1 - \frac{1}{32}2a_2\right)} \qquad (20)$$

Taux de déclin de l'énergie : de façon similaire :

$$\zeta_T^{(0)*} = \frac{\zeta_T^{(0)}}{\nu_0} = \frac{1}{\nu_0}\frac{1}{n}\frac{m}{k_BT\,d}\,\omega[f^{(0)}, V^2 f^{(0)}] - \underbrace{\frac{1}{\nu_0}\frac{1}{n}\,\omega[f^{(0)}, f^{(0)}]}_{=\,\zeta_n^{(0)*}}$$

$$= \frac{\eta^{(0)}}{p^{(0)}}\,\frac{m}{n k_B T d}\,\sigma^{d-1}\beta_1 \int_{\mathbb{R}^{2d}} dV_1\, dV_2\, |V_1 - V_2|\, f^{(0)}(V_1)\, V_1^2\, f^{(0)}(V_2) - \zeta_n^{(0)*}$$

$$= \frac{\eta^{(0)}}{p^{(0)}}\,\frac{m}{n k_B T d}\,\sigma^{d-1}\beta_1\,\frac{n^2}{V_T^{2d}}\,\frac{1}{\pi^d}\int_{\mathbb{R}^{2d}} dV_1\, dV_2\, |V_1 - V_2|\, e^{-V_1^2/V_T^2} e^{-V_2^2/V_T^2}\, V_1^2 \left[1 + a_2 S_2(V_1^2/V_T^2)\right] \times \left[1 + a_2 S_2(V_2^2/V_T^2)\right] - \zeta_n^{(0)*}$$

$$= \frac{\eta^{(0)}}{p^{(0)}}\,\frac{m}{\cancel{n} k_B T d}\,\sigma^{d-1}\beta_1\,\frac{n^{\cancel{2}}}{\cancel{V_T^{2d}}}\,\frac{1}{\pi^d}\int_{\mathbb{R}^{2d}} dc_1\, dc_2\, \cancel{V_T^{2d}}\, V_T\, |c_1 - c_2|\, V_T^2\, c_1^2\, e^{-c_1^2} e^{-c_2^2}\left[1 + a_2\left(S_2(c_1^2) + S_2(c_2^2)\right)\right] + \mathcal{O}(a_2^2) - \zeta_n^{(0)*} \qquad (21)$$

A nouveau, on passe dans les coordonnées du centre de masse et de la vitesse relative, avec :

$$G^2 = (c + 1/2\, c_{12})^2 = c^2 + c_{12}^2/4 + 2\, c\cdot c_{12}\,, \qquad (22)$$

or comme $c\cdot c_{12}$ engendre des moments impairs, la contribution de ce terme sera nulle. Ainsi :

$$\xi_T^{(0)*} = \frac{\eta^{(0)}}{p^{(0)}}\frac{m}{k_B T d}\sigma^{d-1}\beta_1\frac{n}{\pi^d}V_T^3\int_{\mathbb{R}^{2d}} dc_{12}\,dc\left(c_{12}c^2 + \frac{1}{4}c_{12}^3\right)e^{-2c^2}e^{-c_{12}^2/2}$$

$$\times\left[1 + a_2\left\{c^4 + \frac{1}{16}c_{12}^4 + \frac{d+2}{2d}c^2c_{12}^2 - (d+2)c^2 - \frac{d+2}{4}c_{12}^2 + \frac{d(d+2)}{4}\right\}\right] - \xi_n^{(0)*}$$

$$= \frac{\eta^{(0)}}{p^{(0)}}\frac{m}{k_B T d}\sigma^{d-1}\beta_1\frac{n}{\pi^d}V_T^3\left[M_{12} + \frac{1}{4}M_{30}\right] - \xi_n^{(0)*}$$

$$= \frac{\eta^{(0)}}{p^{(0)}}\frac{m}{k_B T d}\sigma^{d-1}\beta_1\frac{n}{\pi^d}V_T^3\Big[M_{12}^0\left\{1 + \frac{a_2}{16d}\Big(\overbrace{d(1+4) - 2d(1+2) + 2\cdot 1\cdot 2\cdot(d+2)}^{=5d-6d+4d+8=3d+8}\Big)\right\}$$

$$+\frac{1}{4}M_{30}^0\left\{1 + \frac{a_2}{16d}\Big(\underbrace{d(9+0) - 2d(3+0) + 0}_{=3d}\Big)\right\}\Big] - \xi_n^{(0)*}$$

$$= \frac{d+2}{8}\frac{\Gamma(d/2)}{\pi^{\frac{d-1}{2}}}\frac{\sqrt{mk_BT}}{\sigma^{d-1}}\frac{1}{k_BT}\frac{m}{k_BTd}\sigma^{d-1}\frac{\pi^{\frac{d-1}{2}}}{\Gamma(\frac{d+1}{2})}\frac{n}{\pi^d}\left(\frac{2k_BT}{m}\right)^{3/2}\times$$

$$\times\left[\pi^d 2^{\frac{1-2}{2}}\frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})\Gamma(\frac{d+2}{2})}{\Gamma(d/2)^2}\left\{1 + \frac{a_2}{16d}(3d+8)\right\} + \frac{1}{4}\pi^d 2^{3/2}\frac{\Gamma(\frac{d+3}{2})\Gamma(d/2)}{\Gamma(d/2)^2}\left\{1 + \frac{a_2}{16d}\cdot 3d\right\}\right] - \xi_n^{(0)*}$$

$$= \frac{d+2}{d8}\frac{\Gamma(d/2)}{\Gamma(\frac{d+1}{2})}2^{3/2}\left[2^{-1/2}\frac{d}{2}\frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})\Gamma(d/2)}{\Gamma(d/2)^2}\left\{1 + \frac{3d+8}{16d}a_2\right\} + 2^{-1/2}\frac{d+1}{2}\frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})}{\Gamma(d/2)}\left\{1 + \frac{3d}{16d}a_2\right\}\right] - \xi_n^{(0)*}$$

$$= \frac{d+2}{d8}\left[d + \frac{3d+8}{16}a_2 + d + \frac{3d}{16}a_2 + 1 + \frac{3}{16}a_2\right] - \frac{d+2}{d8}\left[2d - \frac{2}{16}a_2\right]$$

$$\boxed{\xi_T^{(0)*} = \frac{d+2}{8d}\left[1 + \frac{11+8d}{32}2a_2\right]} \qquad (23)$$

$$= \frac{d+2}{8d}\left[2d + 1 - 2d + a_2\frac{1}{16}(3d+8+3d+3+2d)\right]$$

$$= \frac{d+2}{8d}\left[1 + a_2\frac{8d+11}{16}\right]$$

Ayant les taux de déclin, il reste à évaluer les fonctions ν_η^*, ν_κ^*, et ν_μ^*. Ceci ne peut pas être réalisé analytiquement en toute généralité car $\mathcal{A}_i$, $\mathcal{B}_i$, et $\mathcal{Z}_{ij}$ sont des fonctions inconnues. On réalise donc un développement de ces dernières fonctions en polynôme de Sonine, ne gardant que le premier terme de contribution non nulle.

Prenons :

$$S(\mathbf{v}) = S^{(1)}_{3/2}(v^2)\,\mathbf{v}\,\mathbf{v} \quad ; \quad S^{(n)}_{\ell}(x) = \sum_{k=0}^{n} (-x)^k \frac{(n+\ell)!}{(\ell+k)!\,(n-k)!\,k!}$$

$$D(\mathbf{v}) = S^{(0)}_{5/2}(v^2)$$

(A)

$$\mathcal{A}(\mathbf{v}) = a_1\,\mathcal{M}(\mathbf{v})\,S(\mathbf{v}), \tag{1}$$

$$\mathcal{B}(\mathbf{v}) = b_1\,\mathcal{M}(\mathbf{v})\,S(\mathbf{v}), \tag{2}$$

$$\mathcal{C}(\mathbf{v}) = c_0\,\mathcal{M}(\mathbf{v})\,D(\mathbf{v}), \tag{3}$$

alors :

$$\nu_\eta^* = \frac{1}{\nu_0}\frac{\int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{v}\, D_{ij}\, J[\mathcal{M}(\mathbf{v})D_{ij}(\mathbf{v})]}{\int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{v}\, D_{ij}(\mathbf{v})\mathcal{M}(\mathbf{v})D_{ij}(\mathbf{v})} \; ; \; \nu_\kappa^* = \frac{1}{\nu_0}\frac{\int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{v}\, S_i(\mathbf{v})\, J[\mathcal{M}(\mathbf{v})S_i(\mathbf{v})]}{\int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{v}\, S_i(\mathbf{v})\mathcal{M}(\mathbf{v})S_i(\mathbf{v})} \; ; \; \nu_\mu^* = \frac{1}{\nu_0}\frac{\int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{v}\, S_i(\mathbf{v})\, J[\mathcal{M}(\mathbf{v})S_i(\mathbf{v})]}{\int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{v}\, S_i(\mathbf{v})\mathcal{M}(\mathbf{v})S_i(\mathbf{v})} = \nu_\kappa^* \tag{4}$$

Tous les dénominateurs peuvent être calculés explicitement facilement.

$$\int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{v}\, S_i(\mathbf{v})S_i(\mathbf{v})\mathcal{M}(\mathbf{v}) = \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{v}\,\left(\frac{m}{2}v^2 - \frac{d+2}{2}kT\right)^2 v_i v_i\,\mathcal{M}(\mathbf{v}), \tag{5}$$

avec $\mathcal{M}(\mathbf{v})$ exprimé dans le régime d'échelle :

$$\mathcal{M}(\mathbf{v}) = \frac{n}{v_T^d}\mathcal{M}(c) = \frac{n}{v_T^d}\frac{1}{\pi^{d/2}}e^{-c^2} = \frac{n}{v_T^d}\frac{1}{\pi^{d/2}}e^{-v^2/v_T^2} \quad , \quad v_T = \sqrt{2/\beta m} \tag{6}$$

(6) dans (5) $\Rightarrow$

$$\int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{v}\, S_i(\mathbf{v})S_i(\mathbf{v})\mathcal{M}(\mathbf{v}) = \frac{n}{v_T^d}\frac{1}{\pi^{d/2}}\int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{v}\left(\frac{m^2}{4}v^4 + \frac{(d+2)^2}{4}\frac{1}{\beta^2} - m\frac{d+2}{2}\frac{1}{\beta}v^2\right)v^2 e^{-v^2/v_T} \quad ; \; c = v/v_T \; ; \; d\mathbf{v} = v_T^d\, dc$$

$$= \frac{n}{\pi^{d/2}}\int_{\mathbb{R}^d} dc\left(\frac{m^2}{4}v_T^6 c^6 + \frac{(d+2)^2}{4}\frac{1}{\beta^2}v_T^2 c^2 - m\frac{d+2}{2}\frac{1}{\beta}v_T^4 c^4\right)e^{-c^2}$$

$$= \frac{n}{\pi^{d/2}}\left[\frac{m^2}{4}v_T^6 I_6 + \frac{(d+2)^2}{4}\frac{1}{\beta^2}v_T^2 I_2 - m\frac{d+2}{2}\frac{1}{\beta}v_T^4 I_4\right], \tag{7}$$

où :

$$I_n = \int_{\mathbb{R}^d} dc\, c^n e^{-c^2} = \pi^{d/2}\frac{\Gamma\left(\frac{d+n}{2}\right)}{\Gamma(d/2)} \tag{8}$$

(8) dans (7) $\Rightarrow$

$$\int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{v}\, S_i(\mathbf{v})S_i(\mathbf{v})\mathcal{M}(\mathbf{v}) = \frac{n}{\pi^{d/2}}\left[\frac{m^2}{4}v_T^6\pi^{d/2}\frac{\Gamma\left(\frac{d+6}{2}\right)}{\Gamma(d/2)} + \frac{(d+2)^2}{4}\frac{1}{\beta^2}v_T^2\frac{\Gamma\left(\frac{d+2}{2}\right)}{\Gamma(d/2)}\pi^{d/2} - m\frac{d+2}{2}\frac{1}{\beta}v_T^4\frac{\Gamma\left(\frac{d+4}{2}\right)}{\Gamma(d/2)}\pi^{d/2}\right]$$

$$= n\left[\frac{m^2}{4}\left(\frac{2}{\beta m}\right)^3\frac{d+4}{2}\frac{d+2}{2}\frac{d}{2} + \frac{(d+2)^2}{4}\frac{1}{\beta^2}\left(\frac{2}{\beta m}\right)\frac{d}{2} - m\frac{d+2}{2}\frac{1}{\beta}\left(\frac{2}{\beta m}\right)^2\frac{d+2}{2}\frac{d}{2}\right]$$

$$= \frac{nd}{\beta^3 m}\left[\frac{1}{4}2^3\frac{(d+2)(d+4)}{2^3} + \frac{(d+2)^2}{4} - \frac{d+2}{2}2^2\frac{d+2}{4}\right]$$

$$= \frac{n}{m\beta^3}d(d+2)\left[\frac{1}{4}(d+4) + \frac{1}{4}(d+2) - 2\,\frac{1}{4}(d+2)\right]$$

$$= \frac{n}{m\beta^3}\frac{d(d+2)}{4}\left[d+4-d-2\right]$$

$$= \frac{d(d+2)}{2}\frac{n}{m\beta^3} \tag{9}$$

Si d=3 on a bien le préfacteur 15/2, le même que dans [3]. L'autre dénominateur est :

$$\int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{v}\, D_{ij}(\mathbf{v})D_{ij}(\mathbf{v})\mathcal{M}(\mathbf{v}) = \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{v}\, m^2\left(v_i v_j - \frac{1}{d}v^2\delta_{ij}\right)\left(v_i v_j - \frac{1}{d}v^2\delta_{ij}\right)\frac{n}{v_T^d}\frac{1}{\pi^{d/2}}e^{-v^2/v_T^2} \quad ; \; c = v/v_T \; ; \; d\mathbf{v} = v_T^d\, dc$$

$$= \frac{n}{\pi^{d/2}}m^2 v_T^4\int_{\mathbb{R}^d} dc\left[\underbrace{c_i c_j c_i c_j}_{=c^4} - \frac{1}{d}c^2\underbrace{c_i c_j\delta_{ij}}_{=c^2}\cdot 2 + \frac{1}{d^2}c^4\underbrace{\delta_{ij}\delta_{ij}}_{=\delta_{ii}=d}\right]e^{-c^2}$$

$$= \frac{n}{\pi^{d/2}}m^2 v_T^4\int_{\mathbb{R}^d} dc\left[c^4 - \frac{2}{d}c^4 + \frac{1}{d}c^4\right]e^{-c^2}$$

$$= \frac{n}{\pi^{d/2}}m^2\left(\frac{2}{\beta m}\right)^2\frac{d-1}{d}\int_{\mathbb{R}^d} dc\, c^4 e^{-c^2}$$

$$= \frac{n}{\pi^{d/2}}\frac{2^2}{\beta^2}\frac{d-1}{d}\pi^{d/2}\frac{\Gamma\left(\frac{d+4}{2}\right)}{\Gamma(d/2)}$$

$$= \frac{n}{\beta^2}2^2\frac{d-1}{d}\frac{d+2}{2}\frac{d}{2}$$

$$= \frac{(d+2)(d-1)}{\beta^2}n \tag{10}$$

A nouveau, pour d=3 on a le préfacteur 10 qui est le même que dans [3]. (10) et (9) dans (4) donnent :

$$\nu_\eta^* = \frac{\beta^2}{(d+2)(d-1)n\nu_0}\int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{v}\, D_{ij}\, J[\mathcal{M}(\mathbf{v})D_{ij}(\mathbf{v})] \quad ; \quad \nu_\kappa^* = \nu_\mu^* = \frac{2m\beta^3}{d(d+2)n\nu_0}\int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{v}\, S_i(\mathbf{v})\, J[\mathcal{M}(\mathbf{v})S_i(\mathbf{v})] \tag{11}$$

Il reste à calculer les numérateurs. Pour ceci, on se souvient que :

$$J\,g = -pJ_a[f^{(0)},g] - pJ_a[g,f^{(0)}] - (1-p)J_c[f^{(0)},g] - (1-p)J_c[g,f^{(0)}]$$
$$= pL_a g + (1-p)L_c g, \qquad (12)$$

où on a défini les opérateurs L_a et L_c par :

$$L_a g = -J_a[f^{(0)},g] - J_a[g,f^{(0)}] \overset{(9)}{=} \sigma^{d-1}\beta_1 \int_{\mathbb{R}^d} dv_2\, |v_{12}| \left[g(r_1,v_1;t) f^{(0)}(v_2;t) + f^{(0)}(v_1;t)\, g(r_1,v_2;t) \right] \qquad (13)$$

$$L_c g = -J_c[f^{(0)},g] - J_c[g,f^{(0)}] \overset{(8)}{=} -\sigma^{d-1} \int_{\mathbb{R}^d} dv_2 \int d\hat{\sigma}\, \theta(\hat{\sigma}\cdot\hat{v}_{12})(\hat{\sigma}\cdot\underline{v_{12}})(b^{-1}-1) \Big[g(r_1,v_1;t) f^{(0)}(v_2;t) + f^{(0)}(v_1;t)\, g(r_1,v_2;t) \Big] \qquad (14)$$

L'opérateur de collision L_c a été abondamment étudié dans la littérature. En particulier, Brey et al. [3] fournissent des relations ainsi que le résultat final, qui en prenant la limite élastique nous seront utils. Leurs calculs sont faits pour $d=3$, c'est pourquoi il sera nécessaire de les refaire. On doit donc calculer :

$$\int dv\, D_{ij}(v)\, J[\mathcal{M} D_{ij}] = \int dv\, D_{ij} \left\{ pL_a[\mathcal{M} D_{ij}] + (1-p) L_c[\mathcal{M} D_{ij}] \right\}$$
$$= p\int dv\, D_{ij}\, L_a[\mathcal{M} D_{ij}] + (1-p)\int dv\, D_{ij}\, L_c[\mathcal{M} D_{ij}] \qquad (15)$$

$$\int dv\, S_i(v)\, J[\mathcal{M} S_i] = p\int dv\, S_i\, L_a[\mathcal{M} S_i] + (1-p)\int dv\, S_i\, L_c[\mathcal{M} S_i] \qquad (16)$$

Pour réaliser les calculs pour les termes en L_a et L_c nous aurons besoin des deux lemmes suivants.

<u>Lemme</u> : soit X et Y deux fonctions quelconques, alors :

$$\boxed{\int_{\mathbb{R}^d} dv_1\, Y(v_1)\, L_a[\mathcal{M} X] = \sigma^{d-1}\beta_1 \int_{\mathbb{R}^{2d}} dv_1 dv_2\, |v_{12}|\, f^{(0)}(v_1)\, \mathcal{M}(v_2)\, X(v_2) \left[Y(v_1) + Y(v_2) \right]} \qquad (17)$$

<u>Preuve</u> : utilisant la définition (13) :

$$\int dv_1\, Y(v_1)\, L_a[\mathcal{M}X] = \sigma^{d-1}\beta_1 \int_{\mathbb{R}^{2d}} dv_1 dv_2\, |v_{12}|\, Y(v_1) \left[\mathcal{M}(v_1)X(v_1) f^{(0)}(v_2) + f^{(0)}(v_1)\mathcal{M}(v_2)X(v_2) \right]$$
$$= \sigma^{d-1}\beta_1 \int_{\mathbb{R}^{2d}} dv_1 dv_2\, |v_{12}|\, Y(v_1)\mathcal{M}(v_1)X(v_1) f^{(0)}(v_2) + \sigma^{d-1}\beta_1 \int_{\mathbb{R}^{2d}} dv_1 dv_2\, |v_{12}|\, Y(v_1) f^{(0)}(v_1)\mathcal{M}(v_2)X(v_2). \qquad (18)$$

Dans la première intégrale, on fait le changement de variables $v_1 \to v_2$ et $v_2 \to v_1$, donc :

$$\int dv_1\, Y(v_1)\, L_a[\mathcal{M}X] = \sigma^{d-1}\beta_1 \int_{\mathbb{R}^{2d}} dv_1 dv_2\, |v_{12}|\, Y(v_2)\mathcal{M}(v_2)X(v_2) f^{(0)}(v_1) + \sigma^{d-1}\beta_1 \int_{\mathbb{R}^{2d}} dv_1 dv_2\, |v_{12}|\, Y(v_1) f^{(0)}(v_1)\mathcal{M}(v_2)X(v_2)$$
$$= \sigma^{d-1}\beta_1 \int_{\mathbb{R}^{2d}} dv_1 dv_2\, |v_{12}|\, f^{(0)}(v_1)\mathcal{M}(v_2)X(v_2) \left[Y(v_1) + Y(v_2) \right], \qquad (19)$$

ce qui est le résultat cherché. #

<u>Lemme</u> : soit X et Y deux fonctions quelconques, alors :

$$\boxed{\int_{\mathbb{R}^d} dv_1\, Y(v_1)\, L_c[\mathcal{M}X] = -\sigma^{d-1} \int_{\mathbb{R}^{2d}} dv_1 dv_2\, f^{(0)}(v_1)\mathcal{M}(v_2)X(v_2) \int d\hat{\sigma}\, \theta(\hat{\sigma}\cdot\underline{v_{12}})(\hat{\sigma}\cdot\underline{v_{12}})(b-1)\left[Y(v_1) + Y(v_2) \right]} \qquad (20)$$

<u>Preuve</u> : utilisant la définition (14) :

$$\int_{\mathbb{R}^d} dv_1\, Y(v_1) L_c[\mathcal{M}X] = -\sigma^{d-1} \int_{\mathbb{R}^{2d}} dv_1 dv_2 \int d\hat{\sigma}\, \theta(\hat{\sigma}\cdot\underline{v_{12}})(\hat{\sigma}\cdot\underline{v_{12}})\, Y(v_1)(b^{-1}-1) \left[\mathcal{M}(v_1)X(v_1) f^{(0)}(v_2) + f^{(0)}(v_1)\mathcal{M}(v_2)X(v_2) \right]$$
$$= -\sigma^{d-1} \int_{\mathbb{R}^{2d}} dv_1 dv_2 \int d\hat{\sigma}\, \theta(\hat{\sigma}\cdot\underline{v_{12}})(\hat{\sigma}\cdot\underline{v_{12}})\, Y(v_1) b^{-1} \left[\mathcal{M}(v_1)X(v_1) f^{(0)}(v_2) + f^{(0)}(v_1)\mathcal{M}(v_2)X(v_2) \right]$$
$$+ \sigma^{d-1} \int_{\mathbb{R}^{2d}} dv_1 dv_2 \int d\hat{\sigma}\, \theta(\hat{\sigma}\cdot\underline{v_{12}})(\hat{\sigma}\cdot\underline{v_{12}})\, Y(v_1) \left[\mathcal{M}(v_1)X(v_1) f^{(0)}(v_2) + f^{(0)}(v_1)\mathcal{M}(v_2)X(v_2) \right] \qquad (21)$$

Dans la première intégrale, on fait le changement de variables

$$\underline{v_1}' = b^{-1}\underline{v_1} = \underline{v_1} - (\underline{v_{12}}\cdot\hat{\sigma})\,\hat{\sigma}$$
$$\underline{v_2}' = b^{-1}\underline{v_2} = \underline{v_2} + (\underline{v_{12}}\cdot\hat{\sigma})\,\hat{\sigma}$$

L'intégration sur l'angle solide ne change pas, et :

$$dv_1' dv_2' = J\, dv_1 dv_2$$
$$J = \left| \det \begin{pmatrix} 1-\hat{\sigma}^2 & \hat{\sigma}^2 \\ \hat{\sigma}^2 & 1-\hat{\sigma}^2 \end{pmatrix} \right| = \left| \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right| = 1$$

L'effet sur v_{12} est :

$$b^{-1}\underline{V_{12}} = \underline{V_{12}} - 2(\underline{V_{12}}\cdot\hat{\sigma})\hat{\sigma},$$

donc:

$$\hat{\sigma}\cdot b^{-1}\underline{V_{12}} = \hat{\sigma}\cdot\underline{V_{12}} - 2(\underline{V_{12}}\cdot\hat{\sigma})\hat{\sigma}^2 = -\hat{\sigma}\cdot\underline{V_{12}}.$$

Ainsi (21) devient (en sachant que $b^{-1}A(V_i) = A(b^{-1}V_i)$ pour $i=1,2$, et toute fonction A):

$$\int_{\mathbb{R}^d} dv_1 Y(v_1) L_c[\mathcal{M}X] = -\sigma^{d-1}\int_{\mathbb{R}^{2d}} dv_1' dv_2' \int d\hat{\sigma}\, \theta(-\hat{\sigma}\underline{V_{12}'})(-\hat{\sigma}\cdot\underline{V_{12}'})\, Y(bV_1')\left[\mathcal{M}(V_1')X(V_1')f^{(0)}(V_2') + f^{(0)}(V_1')\mathcal{M}(V_2')X(V_2')\right]$$

$$+\sigma^{d-1}\int_{\mathbb{R}^{2d}} dv_1 dv_2 \int d\hat{\sigma}\, \theta(\hat{\sigma}\underline{V_{12}})(\hat{\sigma}\cdot\underline{V_{12}})\; Y(V_1)\left[\mathcal{M}(V_1)X(V_1)f^{(0)}(V_2) + f^{(0)}(V_1)\mathcal{M}(V_2)X(V_2)\right] \quad (22)$$

Dans la première intégrale, on fait le changement de variables $V_1' \to V_1$ et $V_2' \to V_2$, donc:

$$\int_{\mathbb{R}^d} dv_1 Y(v_1) L_c[\mathcal{M}X] = -\sigma^{d-1}\int_{\mathbb{R}^{2d}} dv_1 dv_2 \int d\hat{\sigma}\, \theta(\hat{\sigma}\cdot\underline{V_{12}})(\hat{\sigma}\cdot\underline{V_{12}})\left[\mathcal{M}(V_1)X(V_1)f^{(0)}(V_2) + f^{(0)}(V_1)\mathcal{M}(V_2)X(V_2)\right](b-1)\,Y(V_1)$$

$$= -\sigma^{d-1}\int_{\mathbb{R}^{2d}} dv_1 dv_2 \int d\hat{\sigma}\, \theta(\hat{\sigma}\cdot\underline{V_{12}})(\hat{\sigma}\cdot\underline{V_{12}})\mathcal{M}(V_1)X(V_1)f^{(0)}(V_2)\,(b-1)\,Y(V_1)$$

$$-\sigma^{d-1}\int_{\mathbb{R}^{2d}} dv_1 dv_2 \int d\hat{\sigma}\, \theta(\hat{\sigma}\cdot\underline{V_{12}})(\hat{\sigma}\cdot\underline{V_{12}})\mathcal{M}(V_2)X(V_2)f^{(0)}(V_1)\,(b-1)\,Y(V_1) \quad (23)$$

Soit le changement de variables $V_1 \to V_2$, $V_2 \to V_1$ dans la première intégrale, alors:

$$\int_{\mathbb{R}^d} dv_1 Y(v_1) L_c[\mathcal{M}X] = -\sigma^{d-1}\int_{\mathbb{R}^{2d}} dv_1 dv_2 \int d\hat{\sigma}\, \theta(-\hat{\sigma}\cdot\underline{V_{12}})(-\hat{\sigma}\cdot\underline{V_{12}})\mathcal{M}(V_2)X(V_2)f^{(0)}(V_1)\,(b-1)\,Y(V_2)$$

$$-\sigma^{d-1}\int_{\mathbb{R}^{2d}} dv_1 dv_2 \int d\hat{\sigma}\, \theta(\hat{\sigma}\cdot\underline{V_{12}})(\hat{\sigma}\cdot\underline{V_{12}})\mathcal{M}(V_2)X(V_2)f^{(0)}(V_1)\,(b-1)\,Y(V_1)$$

$$= -\sigma^{d-1}\int_{\mathbb{R}^{2d}} dv_1 dv_2\, f^{(0)}(V_1)\mathcal{M}(V_2)X(V_2)\int d\hat{\sigma}\, \theta(\hat{\sigma}\cdot\underline{V_{12}})(\hat{\sigma}\cdot\underline{V_{12}})\,(b-1)\left[Y(V_1)+Y(V_2)\right], \quad (24)$$

ce qui est le résultat cherché. #

Calcul de $\mathcal{L}a$ avec $X = Y = S_i(V)$: V_{jk}^*, V_{ii}^*

• Vérifications :
✓ — une fois α_{ij} et δ_{ij} connus : ok
— coeff. α_{ij} et δ_{ij} :

① Ⓐ

$$\int_{\mathbb{R}^d} dv_1\, Y(v_1)\, \mathcal{L}a[\mathcal{M}X] \overset{\text{lemme}}{=} \sigma^{d-1}\beta_1 \int_{\mathbb{R}^{2d}} dv_1 dv_2\, |V_{12}|\, f^{(0)}(v_1)\mathcal{M}(v_2)X(v_2)\left[Y(v_1)+Y(v_2)\right]$$

$$= \sigma^{d-1}\beta_1 \int_{\mathbb{R}^{2d}} dv_1 dv_2\, |V_{12}|\, f^{(0)}(v_1)\mathcal{M}(v_2)\left[S_i(v_2)S_i(v_1) + S_i(v_2)S_i(v_2)\right] \qquad (1)$$

Avec :

$$\begin{cases} f^{(0)}(V_1) = \frac{n}{V_T^d}\mathcal{M}(V_1/V_T)\left[1 + a_2 S_2(V_1^2/V_T^2)\right] = \frac{n}{V_T^d}\frac{1}{\pi^{d/2}} e^{-V_1^2/V_T^2}\left[1 + a_2 S_2(V_1^2/V_T^2)\right] \\ \mathcal{M}(V_2) = \frac{n}{V_T^d}\frac{1}{\pi^{d/2}} e^{-V_2^2/V_T^2} \\ S_i(V) = \left(\frac{m}{2}V^2 - \frac{d+2}{2}\frac{1}{\beta}\right)V_i \end{cases}$$

Ainsi (1) devient :

$$\int_{\mathbb{R}^d} dv_1\, S_i(V_1)\mathcal{L}a[\mathcal{M}S_i] = \sigma^{d-1}\beta_1\int_{\mathbb{R}^{2d}} dv_1 dv_2\, |V_{12}|\frac{n}{V_T^d}\frac{1}{\pi^{d/2}}e^{-V_1^2/V_T^2}\frac{n}{V_T^d}\frac{1}{\pi^{d/2}}e^{-V_2^2/V_T^2}\left[1 + a_2 S_2(V_1^2/V_T^2)\right]\times$$

$$\times\left[\left(\frac{m}{2}V_1^2 - \frac{d+2}{2}\frac{1}{\beta}\right)\left(\frac{m}{2}V_2^2 - \frac{d+2}{2}\frac{1}{\beta}\right)V_{1i}V_{2i} + \left(\frac{m}{2}V_2^2 - \frac{d+2}{2}\frac{1}{\beta}\right)^2 V_{2i}V_{2i}\right]$$

Changement de variables : $c_i = v_i/V_T$; $dc_i = dv_i/V_T^d$ $\Longrightarrow$

$$\int_{\mathbb{R}^d} dv_1\, S_i(V_1)\mathcal{L}a[\mathcal{M}S_i] = \sigma^{d-1}\beta_1\frac{n^2}{\cancel{V_T^{2d}}}\frac{1}{\pi^d}\cancel{V_T^{2d}}\int_{\mathbb{R}^{2d}} dc_1 dc_2\, V_T|c_{12}|\,e^{-c_1^2}e^{-c_2^2}\left[1 + a_2 S_2(c_1^2)\right]\times$$

$$\times\left[\left(\frac{m}{2}V_T^2c_1^2 - \frac{d+2}{2}\frac{1}{\beta}\right)\left(\frac{m}{2}V_T^2c_2^2 - \frac{d+2}{2}\frac{1}{\beta}\right)V_T^2 c_1\cdot c_2 + \left(\frac{m}{2}V_T^2c_2^2 - \frac{d+2}{2}\frac{1}{\beta}\right)^2 V_T^2 c_2^2\right] \qquad (2)$$

$$= \sigma^{d-1}\beta_1\frac{n^2}{\pi^d}V_T^3\int_{\mathbb{R}^{2d}} dc_1 dc_2\, |c_{12}|\,e^{-c_1^2}e^{-c_2^2}\left[1 + Ac_1^4 + Bc_1^2 + D\right]\left[(Ec_1^2+F)(Ec_2^2+F)c_1\cdot c_2 + (Ec_2^2+F)^2c_2^2\right], \qquad (3)$$

avec :

$$A = \tfrac{1}{2}a_2\ ;\ B = -\tfrac{d+2}{2}a_2\ ;\ D = \tfrac{d(d+2)}{8}a_2 = -\tfrac{d}{4}B\ ;\ E = \tfrac{m}{2}V_T^2\ ;\ F = -\tfrac{d+2}{2}\tfrac{1}{\beta} = \tfrac{B}{a_2}E, \qquad (4)$$

car

$$F = -\frac{d+2}{2}\frac{1}{\beta} = -\frac{d+2}{2}\frac{m}{2}\underbrace{\frac{2}{m\beta}}_{=V_T^2} = \underbrace{-\frac{d+2}{2}}_{=B/a_2}\underbrace{\frac{m}{2}V_T^2}_{=E} = \frac{B}{a_2}E.$$

Ainsi :

$$\int_{\mathbb{R}^d} dv_1\, S_i(V_1)\mathcal{L}a[\mathcal{M}S_i] = \underbrace{\sigma^{d-1}\beta_1\frac{n^2}{\pi^d}V_T^3E^2}_{=\sigma^{d-1}\beta_1\frac{n^2}{\pi^d}\frac{m^2}{4}V_T^7}\int_{\mathbb{R}^{2d}} dc_1dc_2\,|c_{12}|\,e^{-c_1^2-c_2^2}\underbrace{\left[1 + Ac_1^4 + Bc_1^2 - \tfrac{d}{4}B\right]\left[\left(c_1^2 + \tfrac{B}{a_2}\right)\left(c_2^2 + \tfrac{B}{a_2}\right)c_1c_2 + \left(c_2^2 + \tfrac{B}{a_2}\right)^2 c_2^2\right]}_{:= H(c_1,c_2)} \qquad (5)$$

$$H(c_1,c_2) = \underbrace{\left[1 + Ac_1^4 + Bc_1^2 - \tfrac{d}{4}B\right]\left(c_2^2 + B/a_2\right)}\underbrace{\left[(c_1^2 + B/a_2)c_1c_2 + (c_2^2 + B/a_2)c_2^2\right]}$$

$$= c_2^2 + \frac{B}{a_2} + Ac_1^4c_2^2 + \frac{AB}{a_2}c_1^4 + Bc_1^2c_2^2 + \frac{B^2}{a_2}c_1^2 - \frac{d}{4}\frac{B^2}{a_2} - \frac{d}{4}Bc_2^2 \qquad = c_1^2c_1\cdot c_2 + \frac{B}{a_2}c_1\cdot c_2 + c_2^4 + \frac{B}{a_2}c_2^2$$

$$= \frac{B}{a_2}\left(1 - \tfrac{d}{4}B\right) + \left(1 - \tfrac{d}{4}B\right)c_2^2 + \frac{B^2}{a_2}c_1^2 + \frac{AB}{a_2}c_1^4 + Bc_1^2c_2^2 + Ac_1^4c_2^2$$

$$= \frac{B}{a_2}\left(1-\tfrac{d}{4}B\right)c_1^2c_1\cdot c_2 + \left(\frac{B}{a_2}\right)^2\left(1-\tfrac{d}{4}B\right)c_1\cdot c_2 + \frac{B}{a_2}\left(1-\tfrac{d}{4}B\right)c_2^4 + \left(\frac{B}{a_2}\right)^2\left(1-\tfrac{d}{4}B\right)c_2^2$$

$$+ \left(1-\tfrac{d}{4}B\right)c_1^2c_2^2c_1\cdot c_2 + \frac{B}{a_2}\left(1-\tfrac{d}{4}B\right)c_2^2c_1\cdot c_2 + \left(1-\tfrac{d}{4}B\right)c_2^6 + \frac{B}{a_2}\left(1-\tfrac{d}{4}B\right)c_2^4$$

$$+ \frac{B^2}{a_2}c_1^4c_1\cdot c_2 \quad + \frac{B^3}{a_2^2}c_1^2c_1\cdot c_2 \quad + \frac{B^2}{a_2}c_1^2c_2^4 \quad + \frac{B^3}{a_2^2}c_1^2c_2^2$$

$$+ \frac{AB}{a_2}c_1^6c_1\cdot c_2 \quad + \frac{AB^2}{a_2^2}c_1^4c_1\cdot c_2 \quad + \frac{AB}{a_2}c_1^4c_2^4 \quad + \frac{AB^2}{a_2^2}c_1^4c_2^2$$

$$+ Bc_1^4c_2^2c_1\cdot c_2 \quad + \frac{B^2}{a_2}c_1^2c_2^2c_1\cdot c_2 \quad + Bc_1^2c_2^6 \quad + \frac{B^2}{a_2}c_1^2c_2^4$$

$$+ Ac_1^6c_2^2c_1\cdot c_2 \quad + \frac{AB}{a_2}c_1^4c_2^2c_1\cdot c_2 \quad + Ac_1^4c_2^6 \quad + \frac{AB}{a_2}c_1^4c_2^4$$

$$= \frac{B}{a_2}\left[1-\frac{d}{4}B+\frac{B^2}{a_2}\right] c_1^2\, c_1\cdot c_2 + \left(\frac{B}{a_2}\right)^2\left(1-\frac{d}{4}B\right) c_1\cdot c_2 + 2\frac{B}{a_2}\left(1-\frac{d}{4}B\right) c_2^4 + \left(\frac{B}{a_2}\right)^2\left(1-\frac{d}{4}B\right) c_2^2$$

$$+\left(1-\frac{d}{4}B+\frac{B^2}{a_2}\right) c_1^2 c_2^2\, c_1\cdot c_2 + \frac{B}{a_2}\left(1-\frac{d}{4}B\right) c_2^2\, c_1\cdot c_2 + \left(1-\frac{d}{4}B\right) c_2^6 + \frac{B^2}{a_2}\left(1+\frac{A}{a_2}\right) c_1^4\, c_1\cdot c_2$$

$$+ 2\frac{B^2}{a_2} c_1^2 c_2^4 + \frac{B^3}{a_2^2} c_1^2 c_2^2 + \frac{AB}{a_2} c_1^6\, c_1\cdot c_2 + 2\frac{AB}{a_2} c_1^4 c_2^4$$

$$+\frac{AB^2}{a_2^2} c_1^4 c_2^2 + B\left(1+\frac{A}{a_2}\right) c_1^4 c_2^2\, c_1\cdot c_2 + B\, c_1^2 c_2^6 + A\, c_1^6 c_2^2\, c_1\cdot c_2 + A\, c_1^4 c_2^6 \quad (6)$$

Passage dans le centre de masse:

$$\left.\begin{aligned} c_{12} &= c_1 - c_2 \\ C &= \tfrac{1}{2}(c_1+c_2)\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} c_1 &= C + \tfrac12 c_{12} \\ c_2 &= C - \tfrac12 c_{12}\end{aligned}\right. \quad ; \; dc_1\,dc_2 = dC\,dc_{12}$$

Ainsi:

$$c_1\cdot c_2 = C^2 - c_{12}^2/4 \quad (6a)$$

$$c_{1,2}^2 = C^2 + \tfrac14 c_{12}^2 \pm (C\cdot c_{12}) \quad (6b)$$

$$c_{1,2}^4 = (C^2+\tfrac14 c_{12}^2)^2 + (C\cdot c_{12})^2 \pm 2(C\cdot c_{12})(C^2+\tfrac14 c_{12}^2) \quad (6c)$$

$$c_{1,2}^6 = (C^2+\tfrac14 c_{12}^2)^3 + 3(C\cdot c_{12})^2(C^2+\tfrac14 c_{12}^2) \pm (C\cdot c_{12})\left[3(C^2+\tfrac14 c_{12}^2)^2 + (C\cdot c_{12})^2\right] \quad (6d)$$

Ceci permet de calculer les différents termes de (6).

$$c_{1,2}^2(c_1\cdot c_2) = \left[C^2+\tfrac14 c_{12}^2 \pm (C\cdot c_{12})\right](C^2 - c_{12}^2/4) \quad (7)$$

$$c_1^2c_2^2(c_1\cdot c_2) = \left[(C^2+\tfrac14 c_{12}^2)^2 - (C\cdot c_{12})^2\right](C^2-c_{12}^2/4) \quad (8)$$

$$c_1^4(c_1\cdot c_2) = \left[(C^2+\tfrac14 c_{12}^2)^2 + (C\cdot c_{12})^2 \pm 2(C\cdot c_{12})(C^2+\tfrac14 c_{12}^2)\right](C^2-c_{12}^2/4) \quad (9)$$

$$c_{1,2}^2 c_{2,1}^4 = (C^2+\tfrac14 c_{12}^2)\left[(C^2+\tfrac14 c_{12}^2)^2 + (C\cdot c_{12})^2 \mp 2(C\cdot c_{12})(C^2+\tfrac14 c_{12}^2)\right] \pm (C\cdot c_{12})(C^2+\tfrac14 c_{12}^2)^2 \pm (C\cdot c_{12})^3 - 2(C\cdot c_{12})^2(C^2+\tfrac14 c_{12}^2) \quad (10)$$

$$c_1^2c_2^2 = (C^2+\tfrac14 c_{12}^2)^2 - (C\cdot c_{12})^2 \quad (11)$$

$$c_1^6(c_1\cdot c_2) = (C^2-c_{12}^2/4)\left[(C^2+\tfrac14 c_{12}^2)^3 + 3(C\cdot c_{12})^2(C^2+\tfrac14 c_{12}^2) + (C\cdot c_{12})\{3(C^2+\tfrac14 c_{12}^2)^2 + (C\cdot c_{12})^2\}\right] \quad (12)$$

$$c_1^4c_2^4 = \left[(C^2+\tfrac14 c_{12}^2)^2 + (C\cdot c_{12})^2\right]^2 - 4(C\cdot c_{12})^2(C^2+\tfrac14 c_{12}^2)^2 \quad (13)$$

$$= (C^2+\tfrac14 c_{12}^2)^4 + (C\cdot c_{12})^4 + 2(C\cdot c_{12})^2(C^2+\tfrac14 c_{12}^2)^2 - 4(C\cdot c_{12})^2(C^2+\tfrac14 c_{12}^2)^2$$

$$= (C^2+\tfrac14 c_{12}^2)^4 + (C\cdot c_{12})^4 - 2(C\cdot c_{12})^2(C^2+\tfrac14 c_{12}^2)^2$$

$$c_1^4c_2^2(c_1\cdot c_2) = (C^2-c_{12}^2/4)\left[C^2+\tfrac14 c_{12}^2 - (C\cdot c_{12})\right]\left[(C^2+\tfrac14 c_{12}^2)^2 + (C\cdot c_{12})^2 + 2(C\cdot c_{12})(C^2+\tfrac14 c_{12}^2)\right]$$

$$= (C^2-c_{12}^2/4)\Big[(C^2+\tfrac14 c_{12}^2)^3 + (C\cdot c_{12})^2(C^2+\tfrac14 c_{12}^2) + 2(C\cdot c_{12})(C^2+\tfrac14 c_{12}^2)^2$$
$$- (C\cdot c_{12})(C^2+\tfrac14 c_{12}^2)^2 - (C\cdot c_{12})^3 - 2(C\cdot c_{12})^2(C^2+\tfrac14 c_{12}^2)\Big]$$

$$= (C^2-c_{12}^2/4)\left[(C^2+\tfrac14 c_{12}^2)^3 - (C\cdot c_{12})^2(C^2+\tfrac14 c_{12}^2) + (C\cdot c_{12})(C^2+\tfrac14 c_{12}^2)^2 - (C\cdot c_{12})^3\right] \quad (15)$$

$$c_{1,2}^2c_{2,1}^6 = \left[C^2+\tfrac14 c_{12}^2 \pm (C\cdot c_{12})\right]\left[(C^2+\tfrac14 c_{12}^2)^3 + 3(C\cdot c_{12})^2(C^2+\tfrac14 c_{12}^2) \mp (C\cdot c_{12})\{3(C^2+\tfrac14 c_{12}^2)^2 + (C\cdot c_{12})^2\}\right]$$

$$= (C^2+\tfrac14 c_{12}^2)^4 + 3(C\cdot c_{12})^2(C^2+\tfrac14 c_{12}^2)^2 \mp (C\cdot c_{12})\,3(C^2+\tfrac14 c_{12}^2)^3 \mp (C\cdot c_{12})^3(C^2+\tfrac14 c_{12}^2)$$
$$\pm (C^2+\tfrac14 c_{12}^2)^3(C\cdot c_{12}) \pm 3(C\cdot c_{12})^3(C^2+\tfrac14 c_{12}^2) - 3(C^2+\tfrac14 c_{12}^2)^2(C\cdot c_{12})^2 - (C\cdot c_{12})^4$$

$$= (C^2+\tfrac14 c_{12}^2)^4 \mp 2(C\cdot c_{12})(C^2+\tfrac14 c_{12}^2)^3 \pm 2(C\cdot c_{12})^3(C^2+\tfrac14 c_{12}^2) - (C\cdot c_{12})^4 \quad (16)$$

$$c_1^6c_2^2(c_1\cdot c_2) = (C^2-c_{12}^2/4)\left[C^2+\tfrac14 c_{12}^2 - (C\cdot c_{12})\right]\Big[(C^2+\tfrac14 c_{12}^2)^3 + 3(C\cdot c_{12})^2(C^2+\tfrac14 c_{12}^2)$$
$$+ (C\cdot c_{12})\{3(C^2+\tfrac14 c_{12}^2)^2 + (C\cdot c_{12})^2\}\Big]$$

$$= (C^2-c_{12}^2/4)\Big[(C^2+\tfrac14 c_{12}^2)^4 + 3(C\cdot c_{12})^2(C^2+\tfrac14 c_{12}^2)^2 + 3(C\cdot c_{12})(C^2+\tfrac14 c_{12}^2)^3 + (C\cdot c_{12})^3(C^2+\tfrac14 c_{12}^2)$$
$$- (C\cdot c_{12})(C^2+\tfrac14 c_{12}^2)^3 - 3(C\cdot c_{12})^3(C^2+\tfrac14 c_{12}^2) - 3(C\cdot c_{12})^2(C^2+\tfrac14 c_{12}^2)^2 - (C\cdot c_{12})^4\Big]$$

$$= (C^2-c_{12}^2/4)\left[(C^2+\tfrac14 c_{12}^2)^4 + 2(C\cdot c_{12})(C^2+\tfrac14 c_{12}^2)^3 - 2(C\cdot c_{12})^3(C^2+\tfrac14 c_{12}^2) - (C\cdot c_{12})^4\right] \quad (17)$$

$$c_1^4c_2^6 = \left[C^2+\tfrac14 c_{12}^2 + (C\cdot c_{12})\right]\left[(C^2+\tfrac14 c_{12}^2)^4 - 2(C\cdot c_{12})(C^2+\tfrac14 c_{12}^2)^3 + 2(C\cdot c_{12})^3(C^2+\tfrac14 c_{12}^2) - (C\cdot c_{12})^4\right]$$

$$= (C^2+\tfrac14 c_{12}^2)^5 - 2(C\cdot c_{12})(C^2+\tfrac14 c_{12}^2)^4 + 2(C\cdot c_{12})^3(C^2+\tfrac14 c_{12}^2)^2 - (C\cdot c_{12})^4(C^2+\tfrac14 c_{12}^2)$$
$$+ (C\cdot c_{12})(C^2+\tfrac14 c_{12}^2)^4 - 2(C\cdot c_{12})^2(C^2+\tfrac14 c_{12}^2)^3 + 2(C\cdot c_{12})^4(C^2+\tfrac14 c_{12}^2) - (C\cdot c_{12})^5$$

$$= \left(c^2+\tfrac{1}{4}c_{12}^2\right)^5 - (c\cdot c_{12})\left(c^2+\tfrac{1}{4}c_{12}^2\right)^4 - 2(c\cdot c_{12})^2\left(c^2+\tfrac{1}{4}c_{12}^2\right)^3 + 2(c\cdot c_{12})^3\left(c^2+\tfrac{1}{4}c_{12}^2\right)^2 \quad (18)$$ ③

$$+ (c\cdot c_{12})^4\left(c^2+\tfrac{1}{4}c_{12}^2\right) - (c\cdot c_{12})^5$$

Or par antisymétrie, les termes en $(c\cdot c_{12})^{2k+1}$, $k\in\mathbb{N}$, engendrent une contribution nulle à l'intégrale. De plus, la relation (262) donne :

$$(c\cdot c_{12})^2 = \frac{1}{d}c^2 c_{12}^2 \quad (19)$$

Qu'en est-il de $(c\cdot c_{12})^4$?

<u>Lemme</u> soit $\underline{x}=(x_1,\dots,x_d)\in\mathbb{R}^d$, $\underline{y}=(y_1,\dots y_d)\in\mathbb{R}^d$, soit $F(x,y)$ une fonction qui ne dépend que des modules de x et y (donc qui est paire en $\underline{x}$ et $\underline{y}$), alors

$$\int_{\mathbb{R}^{2d}} d\underline{x}\,d\underline{y}\; F(\underline{x},\underline{y})\,(\underline{x}\cdot\underline{y})^4 = \int_{\mathbb{R}^{2d}} d\underline{x}\,d\underline{y}\; F(\underline{x},\underline{y})\left(\frac{3}{d^2}x^4y^4 - 2d\,x_i^4y_j^4\right), \quad (20)$$

où les indices i et j peuvent être choisis arbitrairement dans l'ensemble $\{1,\dots,d\}$.

<u>Preuve</u> : on a

$$(\underline{x}\cdot\underline{y})^4 = \sum_{ijkl=1}^{d} x_ix_jx_kx_l\,y_iy_jy_ky_l$$

$$= \sum_{ijkl=1}^{d} x_ix_jx_kx_l\,y_iy_jy_ky_l\left[\delta_{ijkl} + (1-\delta_{ijkl})(\delta_{ij}\delta_{kl}+\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk})\right]$$

$$+ \sum_{ijkl=1}^{d} x_ix_jx_kx_l\,y_iy_jy_ky_l\left[(1-\delta_{ijkl}) + (1-\delta_{ij}\delta_{kl}) + (1-\delta_{ik}\delta_{jl}) + (1-\delta_{il}\delta_{jk})\right]$$

Le premier terme donne tous les moments pairs, tandis que le second donne les moments impairs dont la contribution à l'intégrale sera nulle. Ainsi, en interprétant les égalités au sens de l'intégration du lemme :

$$(\underline{x}\cdot\underline{y})^4 = \sum_{ijkl=1}^{d} x_ix_jx_kx_l\,y_iy_jy_ky_l\;\delta_{ijkl}$$

$$+ \sum_{ijkl=1}^{d} x_ix_jx_kx_l\,y_iy_jy_ky_l\;\delta_{ij}\delta_{kl}\,(1-\delta_{ij}\delta_{kl}\delta_{ik})$$

$$+ \sum_{ijkl=1}^{d} x_ix_jx_kx_l\,y_iy_jy_ky_l\;\delta_{ik}\delta_{jl}\,(1-\delta_{ij}\delta_{kl}\delta_{ik})$$

$$+ \sum_{ijkl=1}^{d} x_ix_jx_kx_l\,y_iy_jy_ky_l\;\delta_{il}\delta_{ik}\,(1-\delta_{ij}\delta_{kl}\delta_{ik})$$

$$= \sum_{i=1}^{d} x_i^4y_i^4 + 3\sum_{ij=1}^{d} x_i^2x_j^2y_i^2y_j^2\,(1-\delta_{ij})$$

$$= \sum_{i=1}^{d} x_i^4y_i^4 + 3\sum_{ij=1}^{d} x_i^2x_j^2y_i^2y_j^2 - 3\sum_{ij=1}^{d} x_i^4y_i^4$$

$$= 3\sum_{i=1}^{d} x_i^2y_i^2\sum_{j=1}^{d} x_j^2y_j^2 - 2\sum_{i=1}^{d} x_i^4y_i^4$$

$$\overset{\text{isotropie}}{=} 3\underbrace{\sum_{i=1}^{d} x_i^2}_{=x^2}\;\frac{1}{d}\underbrace{\sum_{k=1}^{d} y_k^2}_{=y^2}\;\underbrace{\sum_{j=1}^{d} x_j^2}_{=x^2}\;\frac{1}{d}\underbrace{\sum_{l=1}^{d} y_l^2}_{=y^2} - 2\underbrace{\sum_{i=1}^{d} x_i^4}_{=d\,x_i^4}\;\frac{1}{d}\underbrace{\sum_{j=1}^{d} y_j^4}_{=d\,y_j^4}$$

$$= \frac{3}{d^2}x^4y^4 - 2d\,x_i^4y_j^4$$

#

Utilisant l'antisymétrie de $(c\cdot c_{12})^{2k+1}$, l'Eq. (19), ainsi que le lemme, les relations (7) à (18) deviennent: ④

$$\underset{2}{C_1^2}(c_1\cdot c_2) = (c^2+1/4\,c_{12}^2)(c^2-1/4\,c_{12}^2) + \dots \qquad (21)$$

$$C_1^2C_2^2(c_1\cdot c_2) = \left[(c^2+1/4\,c_{12}^2)^2-\frac{1}{d}c^2c_{12}^2\right](c^2-c_{12}^2/4) + \dots \qquad (22)$$

$$C_1^4(c_1\cdot c_2) = \left[(c^2+1/4\,c_{12}^2)^2+\frac{1}{d}c^2c_{12}^2\right](c^2-c_{12}^2/4) + \dots \qquad (23)$$

$$\underset{2}{C_1^2}\,\underset{1}{C_2^4} = (c^2+1/4\,c_{12}^2)\left[(c^2+1/4\,c_{12}^2)^2+\frac{1}{d}c^2c_{12}^2\right]-\frac{2}{d}c^2c_{12}^2(c^2+\tfrac{1}{4}c_{12}^2) = (c^2+\tfrac{1}{4}c_{12}^2)\left[(c^2+1/4\,c_{12}^2)^2-\frac{1}{d}c^2c_{12}^2\right]+\dots \qquad (24)$$

$$C_1^2C_2^2 = (c^2+1/4\,c_{12}^2)^2-\frac{1}{d}c^2c_{12}^2 + \dots \qquad (25)$$

$$C_1^6(c_1\cdot c_2) = (c^2-c_{12}^2/4)\left[(c^2+1/4\,c_{12}^2)^3+\frac{3}{d}c^2c_{12}^2(c^2+1/4\,c_{12}^2)\right] + \dots \qquad (26)$$

$$C_1^4C_2^4 = (c^2+1/4\,c_{12}^2)^4+\frac{3}{d^2}c^4c_{12}^4-2d\,c_i^4c_{12j}^4-\frac{2}{d}c^2c_{12}^2(c^2+1/4\,c_{12}^2)^2 + \dots \qquad (27)$$

$$C_1^4C_2^2(c_1\cdot c_2) = (c^2-c_{12}^2/4)\left[(c^2+1/4\,c_{12}^2)^3-\frac{1}{d}c^2c_{12}^2(c^2+1/4\,c_{12}^2)\right] + \dots \qquad (28)$$

$$\underset{2}{C_1^6}\,\underset{1}{C_2^2} = \left((c^2+1/4\,c_{12}^2)^4-\frac{3}{d^2}c^4c_{12}^4+2d\,c_i^4c_{12j}^4\right)(c^2+1/4\,c_{12}^2) \qquad (29)$$

$$C_1^6C_2^2(c_1\cdot c_2) = (c^2-c_{12}^2/4)\left[(c^2+1/4\,c_{12}^2)^4-\frac{3}{d^2}c^4c_{12}^4+2d\,c_i^4c_{12j}^4\right] \qquad (30)$$

$$C_1^4C_2^6 = (c^2+1/4\,c_{12}^2)^5-\frac{2}{d}c^2c_{12}^2(c^2+1/4\,c_{12}^2)^3+\frac{3}{d^2}c^4c_{12}^4(c^2+1/4\,c_{12}^2)-2d\,c_i^4c_{12j}^4 + \dots \qquad (31)$$

Comme $C_1^2C_2^4 = C_1^4C_2^2$, et $C_1^2(c_1\cdot c_2) = C_2^2(c_1\cdot c_2)$ il y a deux termes en moins. On remplace le tout dans l'Eq. (6), et développe à l'aide d'un logiciel de calcul symbolique (on choisit la composante $i=j=1$ dans (27), (29), (30), et (31)):

$$H(c_1,c_2) = \sum_{(i,j)\in\Omega_\alpha}\alpha_{i,j}\,c^ic_{12}^j + \sum_{(i,j)\in\Omega_\gamma}\gamma_{i,j}\,c^ic_{12}^j\,c_1^4c_{12,1}^4 \qquad (31b)$$

$$\Omega_\alpha = \{(10,0);(8,0);(8,2);(6,0);(6,2);(6,4);(4,0);(4,2);(4,4);(4,6);(2,0);(2,2);(2,4);(2,6);(2,8)\}$$

$$\Omega_\gamma = \{\quad (0,2)\}$$

L'Eq. (31b) dans (5) avec $c_1^2+c_2^2 = 2c^2+1/2\,c_{12}^2$ donne:

$$\int_{\mathbb{R}^d} dv_1\,S_i(V_1)\,L_a[\mathcal{M}S_i] = \sigma^{d-1}\beta_1\frac{n^2}{\pi^d}\frac{m^2}{4}V_T^7\sum_{(i,j)\in\Omega_\alpha}\alpha_{ij}\underbrace{\int_{\mathbb{R}^d}dc\,e^{-2c^2}c^i}_{:=J_c[i]}\underbrace{\int_{\mathbb{R}^d}dc_{12}\,e^{-1/2\,c_{12}^2}c_{12}^{j+1}}_{:=J_{c_{12}}[j+1]}$$

$$+\sigma^{d-1}\beta_1\frac{n^2}{\pi^d}\frac{m^2}{4}V_T^7\sum_{(i,j)\in\Omega_\gamma}\gamma_{ij}\underbrace{\int_{\mathbb{R}^d}dc\,e^{-2c^2}c^ic_1^4}_{:=M_c[i]}\underbrace{\int_{\mathbb{R}^d}dc_{12}\,e^{-1/2\,c_{12}^2}c_{12}^{j+1}c_{12,1}^4}_{:=M_{c_{12}}[j+1]} \qquad (32)$$

cf ④b

On utilise

$$\int_{\mathbb{R}^d}dx\,|x|^ne^{-\alpha x^2} = \frac{\pi^{d/2}}{\alpha^{\frac{d+n}{2}}}\frac{\Gamma(\frac{d+n}{2})}{\Gamma(d/2)}, \qquad (33)$$

ainsi: (34)

$$\begin{cases} J_c[i] = \pi^{d/2}\,2^{-(d+i)/2}\dfrac{\Gamma(\frac{d+i}{2})}{\Gamma(d/2)} \\ J_{c_{12}}[j+1] = \pi^{d/2}\,2^{(d+j+1)/2}\dfrac{\Gamma(\frac{d+j+1}{2})}{\Gamma(d/2)} \end{cases} \qquad (35)$$

Le calcul de $M_c[i]$ et $M_{c_{12}}[j+1]$ est plus compliqué. De plus, nous aurons par la suite besoin d'intégrales similaires mais légèrement plus compliquées. C'est pourquoi nous énonçons et prouvons ici deux lemmes dont un cas particulier donne $M_c[i]$ et $M_{c_{12}}[j+1]$

Lemme 1 ...
Preuve ...
Lemme 2 ...
Preuve ...
} cf. hydrodynamique

• **Plus direct:**

$$V_k^{*a} = V_\mu^{*a} = \underbrace{\frac{2m\beta^3}{d(d+2)\,nV_0}\,\sigma^{d-1}\beta_1\,\frac{n^2}{\pi^d}\,\frac{m^2}{4}\,V_T^7}\left[\sum_{(i,j)\in\Omega_\alpha}\alpha_{ij}\,I^2[i]\,I^{1/2}[j+1] + \sum_{(i,j)\in\Omega_\gamma}\gamma_{ij}\,b^2[i]\,b^{1/2}[j+1]\right]$$

$$= \frac{2m\beta^3}{d(d+2)n}\,\frac{d+2}{8}\,\frac{\Gamma(d/2)}{\pi^{(d-1)/2}}\,\frac{\sqrt{mk_BT}}{\sigma^{d-1}}\,\frac{1}{nk_BT}\,\sigma^{d-1}\,\frac{\pi^{(d-1)/2}}{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)}\,\frac{n^2}{\pi^d}\,\frac{m^2}{4}\left(\frac{2}{\beta m}\right)^3\sqrt{\frac{2}{\beta m}}$$

$$= \frac{1}{d}\,\frac{\Gamma(d/2)}{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)2\pi^d}\,\sqrt{2}$$

$$V_k^{*a} = V_\mu^{*a} = \frac{1}{d}\,\frac{\Gamma(d/2)}{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)}\,\frac{1}{\pi^d}\,\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\sum_{(i,j)\in\Omega_\alpha}\alpha_{ij}\,I^2[i]\,I^{1/2}[j+1] + \sum_{(i,j)\in\Omega_\gamma}\gamma_{ij}\,b^2[i]\,b^{1/2}[j+1]\right]$$

: OK : idem (cf. Mathematica)

• **Plus direct:**

$$V_\xi^{*a} = \underbrace{\frac{\beta^2}{(d+2)(d-1)\,nV_0}\,\sigma^{d-1}\beta_1\,\frac{m^2n^2}{\pi^d}\,\frac{V_T^5}{d}}\left[\sum_{(i,j)\in\Omega_\alpha}\alpha_{ij}\,I^2[i]\,I^{1/2}[j+1] + \sum_{(i,j)\in\Omega_\gamma}\gamma_{ij}\,b^2[i]\,b^{1/2}[j+1]\right]$$

$$= \frac{\beta^2}{(d+2)(d-1)n}\,\frac{d+2}{8}\,\frac{\Gamma(d/2)}{\pi^{(d-1)/2}}\,\frac{\sqrt{mk_BT}}{\sigma^{d-1}}\,\frac{1}{nk_BT}\,\sigma^{d-1}\,\frac{\pi^{(d-1)/2}}{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)}\,\frac{m^2n^2}{\pi^d}\,\frac{1}{d}\left(\frac{2}{\beta m}\right)^2\sqrt{\frac{2}{\beta m}}$$

$$= \frac{1}{(d-1)}\,\frac{1}{8}\,\frac{\Gamma(d/2)}{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)}\,\frac{1}{\pi^d}\,\frac{1}{d}\,4\sqrt{2}$$

$$V_\xi^{*a} = \frac{1}{d(d-1)}\,\frac{\Gamma(d/2)}{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)}\,\frac{1}{\sqrt{2}\,\pi^d}\left[\sum_{(i,j)\in\Omega_\alpha}\alpha_{ij}\,I^2[i]\,I^{1/2}[j+1] + \sum_{(i,j)\in\Omega_\gamma}\gamma_{ij}\,b^2[i]\,b^{1/2}[j+1]\right]$$

OK idem Mathematica

La particularisation de second lemme au cas $i=j=k=l$ fournit la relation cherchée: (5)

$$\begin{cases} M_c[i] = 3\pi^{\frac{d-1}{2}}\, 2^{d-6}\, \dfrac{(d+i)(d+i+2)}{d(d+2)}\, \dfrac{\Gamma(\frac{d+i}{2})\,\Gamma(\frac{d-1}{2})}{\Gamma(d-1)}\, 2^{-\frac{d+i}{2}} & (36)\\[2ex] M_{c_{12}}[j+1] = 3\pi^{\frac{d-1}{2}}\, 2^{d-2}\, \dfrac{(d+j+1)(d+j+3)}{d(d+2)}\, \dfrac{\Gamma(\frac{d+j+1}{2})\,\Gamma(\frac{d-1}{2})}{\Gamma(d-1)}\, 2^{+\frac{d+j+1}{2}} & (37)\end{cases}$$

Les Eqs. (34), (35), (36), et (37) dans (32) donnent:

$$\int_{\mathbb{R}^d} dv_1\, S_i(v_1)\, L_a[\mathcal{M}S_i] = \sigma^{d-1}\beta_1 \frac{n^2}{\cancel{\pi^d}}\frac{m^2}{4} v_T^7 \sum_{(i,j)\in\Omega_\alpha} \alpha_{ij}\, \cancel{\pi^d}\, 2^{\frac{j-i+1}{2}}\, \frac{\Gamma(\frac{d+i}{2})\,\Gamma(\frac{d+j+1}{2})}{\Gamma(d/2)^2}$$

$$+\sigma^{d-1}\beta_1 \frac{n^2}{\cancel{\pi^d}}\frac{m^2}{4} v_T^7 \sum_{(i,j)\in\Omega_\gamma} \gamma_{ij}\, 9\, \frac{\cancel{\pi^d}}{\pi}\, 2^{2d-8}\, \frac{(d+i)(d+i+2)(d+j+1)(d+j+3)}{d^2(d+2)^2} \times$$

$$\times \frac{\Gamma(\frac{d+i}{2})\,\Gamma(\frac{d+j+1}{2})\,\Gamma(\frac{d-1}{2})^2}{\Gamma(d-1)^2}\, 2^{\frac{j-i+1}{2}}$$

où $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$, $\beta_1 = \pi^{(d-1)/2}/\Gamma(\frac{d+1}{2})$, et $v_T^2 = 2/(\beta m)$. De l'Eq. (288):

$$\nu_\kappa^{*a} = \nu_\mu^{*a} = \frac{2m\beta^3}{d(d+2)n\nu_0}\int_{\mathbb{R}^d} dv_1\, S_i(v_1)\, L_a[\mathcal{M}S_i]\ ; \quad \nu_0^{-1} = \frac{\eta_0}{p_0} = \frac{d+2}{8}\,\frac{\Gamma(d/2)}{\pi^{\frac{d-1}{2}}}\,\frac{\sqrt{mk_BT}}{\sigma^{d-1}}\,\frac{1}{nk_BT}$$

$$= \frac{\cancel{2m\beta^3}}{d\cancel{(d+2)n}}\,\frac{\cancel{d+2}}{\cancel{8}}\,\frac{\Gamma(d/2)}{\cancel{\pi^{\frac{d-1}{2}}}}\,\frac{\cancel{\sqrt{mk_BT}}}{\cancel{\sigma^{d-1}}}\,\frac{1}{\cancel{nk_BT}}\,\cancel{\sigma^{d-1}}\,\frac{\cancel{\pi^{\frac{d-1}{2}}}}{\Gamma(\frac{d+1}{2})}\,\cancel{\pi^d}\,\frac{\cancel{n^2}}{\cancel{\pi^d}}\,\frac{\cancel{m^2}}{\cancel{4}}\left(\frac{\cancel{2}}{\cancel{\beta m}}\right)^3\sqrt{\frac{\cancel{2}}{\cancel{\beta m}}}\,\cancel{2^{1/2}}\times$$

$$\times\left[\sum_{(i,j)\in\Omega_\alpha}\alpha_{ij}\, 2^{(j-i)/2}\,\frac{\Gamma(\frac{d+i}{2})\,\Gamma(\frac{d+j+1}{2})}{\Gamma(d/2)^2} + \frac{9}{\pi}\,2^{2d-8}\sum_{(i,j)\in\Omega_\gamma}\gamma_{ij}\,2^{(j-i)/2}\,\frac{(d+i)(d+i+2)(d+j+1)(d+j+3)}{d^2(d+2)^2}\,\frac{\Gamma(\frac{d+i}{2})\,\Gamma(\frac{d+j+1}{2})\,\Gamma(\frac{d-1}{2})^2}{\Gamma(d-1)^2}\right]$$

$$= \frac{1}{d}\sum_{(i,j)\in\Omega_\alpha}\alpha_{ij}\,2^{\frac{j-i}{2}}\,\frac{\Gamma(\frac{d+i}{2})\,\Gamma(\frac{d+j+1}{2})}{\Gamma(d/2)\,\Gamma(\frac{d+1}{2})}$$

$$+\frac{9}{\pi}\,\frac{2^{2d-8}}{d}\sum_{(i,j)\in\Omega_\gamma}\gamma_{ij}\,2^{\frac{j-i}{2}}\,\frac{(d+i)(d+i+2)(d+j+1)(d+j+3)}{d^2(d+2)^2}\,\frac{\Gamma(d/2)\,\Gamma(\frac{d+j+1}{2})\,\Gamma(\frac{d+i}{2})\,\Gamma(\frac{d-1}{2})^2}{\Gamma(\frac{d+1}{2})\,\Gamma(d-1)^2}$$

$$= \frac{1}{d}\cdot\Big[\alpha_{10,0}\,2^{-5}\frac{d+8}{2}\frac{d+6}{2}\frac{d+4}{2}\frac{d+2}{2}\frac{d}{2} + \alpha_{8,0}\,2^{-4}\frac{d+6}{2}\frac{d+4}{2}\frac{d+2}{2}\frac{d}{2} + \alpha_{8,2}\,2^{-3}\frac{d+6}{2}\frac{d+4}{2}\frac{d+2}{2}\frac{d}{2}\frac{d+1}{2}$$

$$+\alpha_{6,0}\,2^{-3}\frac{d+4}{2}\frac{d+2}{2}\frac{d}{2} + \alpha_{6,2}\,2^{-2}\frac{d+4}{2}\frac{d+2}{2}\frac{d}{2}\frac{d+1}{2} + \alpha_{6,4}\,2^{-1}\frac{d+4}{2}\frac{d+2}{2}\frac{d}{2}\frac{d+1}{2}\frac{d+3}{2}$$

$$+\alpha_{4,0}\,2^{-2}\frac{d+2}{2}\frac{d}{2} + \alpha_{4,2}\,2^{-1}\frac{d+2}{2}\frac{d}{2}\frac{d+1}{2} + \alpha_{4,4}\,2^{0}\frac{d+2}{2}\frac{d}{2}\frac{d+1}{2}\frac{d+3}{2}$$

$$+\alpha_{4,6}\,2^{1}\frac{d+2}{2}\frac{d}{2}\frac{d+1}{2}\frac{d+3}{2}\frac{d+5}{2} + \alpha_{2,0}\,2^{-1}\frac{d}{2} + \alpha_{2,2}\,2^{0}\frac{d}{2}\frac{d+1}{2}$$

$$+\alpha_{2,4}\,2^{1}\frac{d}{2}\frac{d+1}{2}\frac{d+3}{2} + \alpha_{2,6}\,2^{2}\frac{d}{2}\frac{d+1}{2}\frac{d+3}{2}\frac{d+5}{2} + \alpha_{2,8}\,2^{3}\frac{d}{2}\frac{d+1}{2}\frac{d+3}{2}\frac{d+5}{2}\frac{d+7}{2}\Big]$$

$$+\frac{9}{\pi}\,\frac{2^{2d-8}}{\cancel{d}}\,\gamma_{0,2}\,2^{1}\,\frac{\cancel{d(d+2)}(d+3)(d+5)}{d^2(d+2)^{\cancel{2}}}\,\frac{\Gamma(d/2)\,\Gamma(\frac{d+3}{2})\,\Gamma(d/2)\,\Gamma(\frac{d-1}{2})^2}{\Gamma(\frac{d+1}{2})\,\Gamma(d-1)^2}\ ; \quad \Gamma\left(\tfrac{d+3}{2}\right) = \tfrac{d+1}{2}\,\Gamma\left(\tfrac{d+1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{d}[\dots] + \frac{9}{\pi}\,2^{2d-8}\,\underbrace{\gamma_{0,2}}_{=-\frac{d}{2}a_2}\,\frac{(d+1)(d+3)(d+5)}{d^2(d+2)}\,\underbrace{\frac{\Gamma(d/2)^2\,\Gamma(\frac{d-1}{2})^2}{\Gamma(d-1)^2}}_{=\pi\, 2^4\, 2^{-2d}}$$

$$= \frac{1}{d}[\dots] - a_2\, 9\, 2^{-5}\,\frac{(d+1)(d+3)(d+5)}{d(d+2)} \qquad (38)$$

Logiciel de calcul symbolique:

$$\boxed{\nu_\kappa^{*a} = \nu_\mu^{*a} = \frac{16+27d+8d^2}{32d} + a_2\,\frac{2880+1544d-2658d^2-1539d^3-200d^4}{1024\,d^2(d+2)}} \qquad (39)$$

Calcul de La avec $X = Y = D_{ij}(V)$: ν_2^*

$$\int_{\mathbb{R}^d} dv_1\, D_{ij}(V_1)\, La[\mathcal{M} D_{ij}] = \sigma^{d-1}\beta_1 \int_{\mathbb{R}^{2d}} dv_1 dv_2\, |V_{12}|\, \frac{n}{V_T^d}\frac{1}{\pi^{d/2}} e^{-V_1^2/V_T^2} \frac{n}{V_T^d}\frac{1}{\pi^{d/2}} e^{-V_2^2/V_T^2} \left[1 + a_2 S_2(V_1^2/V_T^2)\right]\left[D_{ij}(V_2)D_{ij}(V_1) + D_{ij}(V_2)D_{ij}(V_2)\right]$$

Changement de variables : $c_i = V_i/V_T$; $dc_i = dv_i/V_T^d$ $\Rightarrow$

$$\int_{\mathbb{R}^d} dv_1\, D_{ij}(V_1)\, La[\mathcal{M} D_{ij}] = \sigma^{d-1}\beta_1 \frac{n^2}{\pi^d}\frac{1}{V_T^{2d}} V_T^{2d} \int_{\mathbb{R}^d} dc_1 dc_2\, V_T |c_{12}|\, e^{-c_1^2 - c_2^2}\left[1 + a_2 S_2(c_1^2)\right] \times$$

$$\Big[\underbrace{m^2\left(V_{1i}V_{1j} - \frac{V_1^2}{d}\delta_{ij}\right)\left(V_{2i}V_{2j} - \frac{V_2^2}{d}\delta_{ij}\right)}_{\substack{= (V_1\cdot V_2)^2 - \frac{1}{d}V_1^2V_2^2 \\ = V_T^4 (c_1\cdot c_2)^2 - V_T^4 \frac{1}{d} c_1^2 c_2^2}} + \underbrace{m^2\left(V_{2i}V_{2j} - \frac{V_2^2}{d}\delta_{ij}\right)\left(V_{2i}V_{2j} - \frac{V_2^2}{d}\delta_{ij}\right)}_{\substack{= V_2^4 - \frac{1}{d}V_2^4 \\ = V_T^4 c_2^4 - V_T^4 \frac{1}{d} c_2^4}}\Big]$$

$$= \sigma^{d-1}\beta_1 \frac{m^2 n^2}{\pi^d}\frac{V_T^5}{d} \int_{\mathbb{R}^d} dc_1 dc_2\, |c_{12}|\, e^{-c_1^2} e^{-c_2^2} \underbrace{\left[1 + A c_1^4 + B c_1^2 + D\right]\left[d(c_1\cdot c_2)^2 - c_1^2 c_2^2 + (d-1)\, c_2^4\right]}_{:= H(c_1,c_2)} \quad (1)$$

$$H(c_1,c_2) = \underset{①}{(1+D)d\,(c_1\cdot c_2)^2} - \underset{②}{(1+D)\,c_1^2c_2^2} + \underset{③}{(1+D)(d-1)\,c_2^4}$$
$$+ \underset{④}{A d\, c_1^4 (c_1\cdot c_2)^2} - \underset{⑤}{A\, c_1^6 c_2^2} + \underset{⑥}{A(d-1)\, c_1^4 c_2^4} + \underset{⑦}{B d\, c_1^2 (c_1\cdot c_2)^2} \underbrace{- B c_1^4 c_2^2 + B(d-1)\, c_1^2 c_2^4}_{=_{⑧} B(d-2)\, c_1^2 c_2^4} \quad ; D = -\frac{d}{4}B \qquad (2)$$

(V)

Passage dans le centre de masse : on simplifie directement comme dans le calcul précédent.

$$① \quad (c_1\cdot c_2)^2 \overset{(6a)}{=} (c^2 - 1/4\, c_{12}^2)^2 \qquad (3)$$

$$② \quad c_1^2 c_2^2 \overset{(25)}{=} (c^2 + 1/4\, c_{12}^2)^2 - \frac{1}{d} c^2 c_{12}^2 + \dots \qquad (4)$$

$$③ \quad c_2^4 \overset{(6c)}{=} (c^2 + 1/4\, c_{12}^2)^2 + \frac{1}{d} c^2 c_{12}^2 + \dots \qquad (5)$$

$$④ \quad c_1^4 (c_1\cdot c_2)^2 \overset{(6c)}{=} (c^2 - 1/4\, c_{12}^2)^2 \left[(c^2 + 1/4\, c_{12}^2)^2 + \frac{1}{d} c^2 c_{12}^2 \right] + \dots \qquad (6)$$

$$⑤ \quad c_1^6 c_2^2 \overset{(30)}{=} (c^2 + 1/4\, c_{12}^2)^4 - \frac{3}{d^2} c^4 c_{12}^4 + 2d\, c_i^4 c_{12j}^4 + \dots \qquad (7)$$

$$⑥ \quad c_1^4 c_2^4 \overset{(27)}{=} (c^2 + 1/4\, c_{12}^2)^4 + \frac{3}{d^2} c^4 c_{12}^4 - 2d\, c_i^4 c_{12j}^4 - \frac{2}{d} c^2 c_{12}^2 (c^2 + 1/4\, c_{12}^2)^2 + \dots \qquad (8)$$

$$⑦ \quad c_1^2 (c_1\cdot c_2)^2 \overset{(6b)}{=} (c^2 + 1/4\, c_{12}^2)(c^2 - 1/4\, c_{12}^2)^2 + \dots \qquad (9)$$

$$⑧ \quad c_1^2 c_2^4 \overset{(24)}{=} (c^2 + 1/4\, c_{12}^2)\left[(c^2 + 1/4\, c_{12}^2)^2 - \frac{1}{d} c^2 c_{12}^2\right] + \dots \qquad (10)$$

On développe (2) avec un logiciel de calcul symbolique (en choisissant $i = j = 1$ dans (7) et (8)) :

$$H(c_1,c_2) = \sum_{(i,j)\in\Omega_\alpha} \alpha_{ij}\, c^i c_{12}^j + \sum_{(i,j)\in\Omega_\gamma} \gamma_{ij}\, c^i c_{12}^j\, c_1^4 c_{12,1}^4 \qquad (11)$$

$$\Omega_\alpha = \left\{(8,0); (6,0); (6,2); (4,0); (4,2); (4,4); (2,4); (2,6); (0,4); (0,6); (0,8)\right\} \qquad (12)$$

$$\Omega_\gamma = \left\{(0,0)\right\} \qquad (13)$$

(11) dans (1) $\Longrightarrow$

$$\int_{\mathbb{R}^d} dv_1\, D_{ij}(V_1)\, La[\mathcal{M} D_{ij}] = \sigma^{d-1}\beta_1 \frac{m^2 n^2}{\pi^d}\frac{V_T^5}{d}\Bigg[\sum_{(i,j)\in\Omega_\alpha} \alpha_{ij} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} dc\, e^{-2c^2} c^i}_{= J_c[i]} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} dc_{12}\, e^{-1/2\, c_{12}^2} c_{12}^{j+1}}_{= J_{c_{12}}[j+1]}$$

$$+ \sum_{(i,j)\in\Omega_\gamma} \gamma_{ij} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} dc\, e^{-2c^2} c^i c_1^4}_{= M_c[i]} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} dc_{12}\, e^{-1/2\, c_{12}^2} c_{12}^{j+1} c_{12,1}^4}_{= M_{c_{12}}[j+1]}\Bigg]$$

$$= \sigma^{d-1}\beta_1 \frac{m^2 n^2}{\cancel{\pi^{d}}} \frac{V_T^5}{d}\, \cancel{\pi^{d}}\, 2^{1/2} \Bigg[\sum_{(i,j)\in\Omega_\alpha} \alpha_{ij}\, 2^{(j-i)/2} \frac{\Gamma(\frac{d+i}{2})\,\Gamma(\frac{d+j+1}{2})}{\Gamma(d/2)^2}$$

$$+ \sum_{(i,j)\in\Omega_\gamma} \gamma_{ij}\, \frac{g}{\pi} \cdot 2^{2d-8}\, 2^{(j-i)/2} \frac{(d+i)(d+i+2)(d+j+1)(d+j+3)}{d^2(d+2)^2} \frac{\Gamma(\frac{d+i}{2})\,\Gamma(\frac{d+j+1}{2})\,\Gamma(\frac{d-1}{2})^2}{\Gamma(d-1)^2}\Bigg] \quad (14)$$

De l'Eq. (288) :

$$V_\eta^{*a} = \frac{\beta^2}{(d+2)(d-1)\,n V_0} \int_{\mathbb{R}^d} d\mathbf{V}_1\, D_{ij}(\mathbf{V}_1)\, L_a[\mathcal{M} D_{ij}] \quad ; \; V_0^{-1} = \frac{d+2}{8} \frac{\Gamma(d/2)}{\pi^{(d-1)/2}} \frac{\sqrt{m k_B T}}{\sigma^{d-1}} \frac{1}{n k_B T}$$

$$= \frac{\cancel{\beta^2}}{\cancel{(d+2)}(d-1)\cancel{n}} \frac{\cancel{d+2}}{\cancel{8}} \frac{\Gamma(d/2)}{\cancel{\pi^{\frac{d-1}{2}}}} \frac{\cancel{\sqrt{m k_B T}}}{\cancel{\sigma^{d-1}}} \frac{1}{\cancel{n k_B T}}\, \cancel{\sigma^{d-1}} \frac{\cancel{\pi^{\frac{d-1}{2}}}\,\cancel{m^2 n^2}}{\Gamma(\frac{d+1}{2})\, d} \frac{\cancel{2^3}}{\cancel{\beta^3 m^2}} \sqrt{\frac{\cancel{2}}{\cancel{\beta m}}}\; \cancel{2^{1/2}} \Bigg[\sum_{(i,j)\in\Omega_\alpha} \alpha_{ij}\, 2^{\frac{j-i}{2}} \frac{\Gamma(\frac{d+i}{2})\,\Gamma(\frac{d+j+1}{2})}{\Gamma(d/2)^2}$$

$$+ \gamma_{0,0}\, \frac{g}{\pi}\, 2^{2d-8} \frac{\cancel{d}\,\cancel{(d+2)}(d+1)(d+3)}{d^{\cancel{2}}(d+2)^{\cancel{2}}} \frac{\Gamma(\frac{d}{2})\,\Gamma(\frac{d+1}{2})\,\Gamma(\frac{d-1}{2})^2}{\Gamma(d-1)^2}\Bigg]$$

$$= \frac{1}{d(d-1)} \sum_{(i,j)\in\Omega_\alpha} \alpha_{ij}\, 2^{\frac{j-i}{2}} \frac{\Gamma(\frac{d+i}{2})\,\Gamma(\frac{d+j+1}{2})}{\Gamma(d/2)\,\Gamma(\frac{d+1}{2})}$$

$$+ \frac{1}{d(d-1)} \underbrace{\frac{g}{\pi}\gamma_{0,0}}_{=-d^2 a_2} 2^{2d-8} \frac{(d+1)(d+3)}{d(d+2)} \underbrace{\frac{\Gamma(d/2)^2\,\Gamma(\frac{d-1}{2})^2}{\Gamma(d-1)^2}}_{=\pi\, 2^4\, 2^{-2d}}$$

$$= \frac{1}{d(d-1)} \Bigg[\alpha_{8,0}\, 2^{-4} \frac{d+6}{2}\frac{d+4}{2}\frac{d+2}{2}\frac{d}{2} + \alpha_{6,0}\, 2^{-3} \frac{d+4}{2}\frac{d+2}{2}\frac{d}{2} + \alpha_{6,2}\, 2^{-2} \frac{d+4}{2}\frac{d+2}{2}\frac{d}{2}\frac{d+1}{2}$$

$$+ \alpha_{4,0}\, 2^{-2} \frac{d+2}{2}\frac{d}{2} + \alpha_{4,2}\, 2^{-1} \frac{d+2}{2}\frac{d}{2}\frac{d+1}{2} + \alpha_{4,4}\, 2^{0} \frac{d+2}{2}\frac{d}{2}\frac{d+1}{2}\frac{d+3}{2}$$

$$+ \alpha_{2,4}\, 2^{1} \frac{d}{2}\frac{d+1}{2}\frac{d+3}{2} + \alpha_{2,6}\, 2^{2} \frac{d}{2}\frac{d+1}{2}\frac{d+3}{2}\frac{d+5}{2}$$

$$+ \alpha_{0,4}\, 2^{2} \frac{d+1}{2}\frac{d+3}{2} + \alpha_{0,6}\, 2^{3} \frac{d+1}{2}\frac{d+3}{2}\frac{d+5}{2} + \alpha_{0,8}\, 2^{4} \frac{d+1}{2}\frac{d+3}{2}\frac{d+5}{2}\frac{d+7}{2} \Bigg]$$

$$- g\, a_2 \frac{\cancel{d^2}}{\cancel{d}(d-1)} \frac{(d+1)(d+3)}{\cancel{d}(d+2)}\, 2^{2d}\, 2^{-8}\, 2^{4}\, 2^{-2d}$$

$$= \frac{1}{d(d-1)}[\,\cdots] - a_2\, g\, 2^{-4} \frac{(d+1)(d+3)}{(d-1)(d+2)} \quad ⓥ \qquad (15)$$

Logiciel de calcul symbolique :

$$\boxed{V_\eta^{*a} = \frac{3+6d+2d^2}{8d} + a_2 \frac{-278-375d-96d^2-2d^3}{256\, d(d+2)}} \qquad (16)$$

Lemmes pour intégrales (vérifié d=2,3,4)

Lemme 1: soit $\underline{x}=(x_1 \dots x_d) \in \mathbb{R}^d$, $a>0$, $d \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$, alors :

$$M^n_{ij} := \int_{\mathbb{R}^d} d\underline{x}\, |\underline{x}|^n e^{-a\underline{x}^2} x_i x_j = \pi^{\frac{d-1}{2}} 2^{d-3} \frac{(d+n)}{d} \frac{\Gamma(\frac{d+n}{2})\,\Gamma(\frac{d-1}{2})}{\Gamma(d+1)} \frac{1}{a^{\frac{d+n+2}{2}}} \delta_{ij}$$

Preuve : l'intégration ne dépendant pas de l'orientation du repère, alors $M^n_{ii} = M^n_{jj} := n$ $\forall i,j$. De plus, par définition $M^n_{ij} = M^n_{ji}$, et par invariance de l'intégrale sous rotation du repère $M^n_{ij} = M^n_{i+1,j+1}$ $\forall i,j$. Aussi

$$M^n_{ij} = M\,\delta_{ij} + C(1-\delta_{ij})$$

Nous montrons à présent que $C=0$. Pour ceci, il suffit de le vérifier pour un choix donné de i et j :

$$M^n_{12} = \int_{\mathbb{R}^d} d\underline{x}\, |x|^n e^{-ax^2} x_1 x_2$$

$$= \int_0^\infty dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta_1 \dots \int_0^\pi d\theta_{d-2}\; r^n e^{-ar^2}\, r^2 \cos\varphi \sin\varphi \left(\prod_{k=1}^{d-2} (\sin\theta_k)^2\right) r^{d-1} \left(\prod_{k=1}^{d-2} (\sin\theta_k)^k\right)$$

$$= \int_0^\infty dr\, r^{n+d+1} e^{-ar^2} \left(\prod_{k=1}^{d-2} \int_0^\pi d\theta_k \,(\sin\theta_k)^k \right) \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi \,\cos\varphi \sin\varphi}_{=0}$$

$$= 0 \qquad (10)$$

Ainsi $\hat{M}_{ij} = M \delta_{ij}$, avec :

$$M = \int_{\mathbb{R}^d} d\underline{x}\, |x|^n e^{-ax^2} x_1^2$$

$$= \int_0^\infty dr\, r^n e^{-ar^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta_1 \dots \int_0^\pi d\theta_{d-2}\, r^2 \cos^2\varphi \left(\prod_{k=1}^{d-2} (\sin\theta_k)^2 \right) r^{d-1} \left(\prod_{k=1}^{d-2} (\sin\theta_k)^k \right)$$

$$= \underbrace{\int_0^\infty dr\, r^{n+d+1} e^{-ar^2}}_{= \frac{1}{2} \frac{\pi^{1/2}}{a^{\frac{1+n+d+1}{2}}} \frac{\Gamma\left(\frac{1+n+d+1}{2}\right)}{\Gamma(1/2)}} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi \,\cos^2\varphi}_{=\pi} \prod_{k=1}^{d-2} \int_0^\pi d\theta_k \,(\sin\theta_k)^{k+2}$$

$$= \frac{\pi}{2} \frac{(n+d)}{2} \Gamma\left(\frac{n+d}{2}\right) \frac{1}{a^{\frac{n+d+2}{2}}} \prod_{k=1}^{d-2} \underbrace{\int_0^\pi d\theta \,(\sin\theta)^{k+2}}_{= \frac{\sqrt{\pi}\, \Gamma\left(\frac{k+3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+2}{2}+1\right)}}$$

$$= \frac{\pi}{4}(n+d) \frac{\Gamma\left(\frac{n+d}{2}\right)}{a^{\frac{n+d+2}{2}}} \prod_{k=1}^{d-2} \sqrt{\pi}\, \frac{k+1}{2} \frac{2}{k+2} \frac{2}{k} \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}$$

$$= \frac{\pi}{4}(n+d) \frac{\Gamma\left(\frac{n+d}{2}\right)}{a^{\frac{n+d+2}{2}}} \pi^{\frac{d-2}{2}} 2^{d-2} \underbrace{\left(\prod_{k=1}^{d-2} \frac{k+1}{k(k+2)} \right)}_{= \frac{2(d-1)}{\Gamma(d+1)}} \underbrace{\left(\prod_{k=1}^{d-2} \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma(k/2)} \right)}_{= \frac{\Gamma\left(\frac{(d-2)+1}{2}\right)}{\Gamma(1/2)}}$$

$$= \frac{\pi}{4}(n+d) \frac{\Gamma\left(\frac{n+d}{2}\right)}{a^{\frac{n+d+2}{2}}} \pi^{d/2} \frac{1}{\pi} 2^{d-2} \frac{2(d-1)}{\Gamma(d+1)} \Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right) \pi^{-1/2}$$

$$= \pi^{\frac{d-1}{2}} 2^{d-3} (d+n)(d-1) \frac{\Gamma\left(\frac{d+n}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right)}{\Gamma(d+1)} \frac{1}{a^{\frac{n+d+2}{2}}}, \qquad (11)$$

$$= \pi^{\frac{d-1}{2}} 2^{d-3} \frac{d+n}{d} \frac{\Gamma\left(\frac{d+n}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right)}{\Gamma(d-1)}$$

ce qui redonne bien le résultat cherché. On vérifie de plus explicitement par calcul direct que le lemme reste valable en dimension $d=2$ $(d=3)$. #

Lemme 2 : soit $\underline{x} = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$, $a > 0$, $d \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$, alors : [vérifié $d=2,3,4,5$]

$$M^n_{ijkl} := \int_{\mathbb{R}^d} d\underline{x}\, |x|^n e^{-ax^2} x_i x_j x_k x_l = 3\pi^{\frac{d-1}{2}} 2^{d-4} \frac{(d+n)(d+n+2)}{d(d+2)} \frac{\Gamma\left(\frac{d+n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right)}{\Gamma(d-1)} \frac{1}{a^{\frac{d+n+4}{2}}} \times \left[\delta_{ijkl} + \frac{1}{3}(\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})(1-\delta_{ijkl}) \right] \qquad (12)\ (13)$$

Preuve : à nouveau, l'intégrale ne dépendant pas de l'orientation du repère

$$\hat{M}^n_{iiii} = \hat{M}^n_{jjjj} := b \quad \forall i,j.$$

Pour les mêmes raisons que précédemment, pour que M_{ijkl} soit non nul il faut que $(i,j)=(k,l)$, ou $(i,k)=(j,l)$, ou $(i,l)=(j,k)$. Ainsi :

$$\hat{M}_{ijkl} = b\,\delta_{ijkl} + \underbrace{c\,(\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})^{(1-\delta_{ijkl})}}, \qquad (14)$$

avec :

$$= c \cdot \left[\delta_{ij}\delta_{kl}(1-\delta_{ik}) + \delta_{ik}\delta_{jl}(1-\delta_{ij}) + \delta_{il}\delta_{jk}(1-\delta_{ij}) \right]$$

$$b = \int_{\mathbb{R}^d} d\underline{x}\, |x|^n e^{-ax^2} x_1^4$$

$$= \int_0^\infty dr\, r^n e^{-ar^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta_1 \cdots \int_0^\pi d\theta_{d-2}\, r^4 \cos^4\varphi \left(\prod_{k=1}^{d-2} (\sin\theta_k)^2 \right) r^{d-1} \left(\prod_{k=1}^{d-2} (\sin\theta_k)^k \right)$$

$$= \underbrace{\int_0^\infty dr\, r^{d+n+3} e^{-ar^2}}_{=\frac{1}{2} \frac{\cancel{\pi^{1/2}}}{a^{\frac{1+n+d+3}{2}}} \frac{\Gamma\left(\frac{1+n+d+3}{2}\right)}{\cancel{\Gamma(1/2)}}} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi\, \cos^4\varphi}_{=\frac{3\pi}{4}} \prod_{k=1}^{d-2} \underbrace{\int_0^\pi d\theta\, (\sin\theta)^{k+4}}_{=\sqrt{\pi}\, \frac{\Gamma\left(\frac{k+5}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+6}{2}\right)}}$$

$$= \frac{3\pi}{8} \pi^{\frac{d-2}{2}} \frac{d+n+2}{2} \frac{d+n}{2} \Gamma\left(\frac{d+n}{2}\right) \frac{1}{a^{\frac{d+n+4}{2}}} \prod_{k=1}^{d-2} \frac{k+3}{2} \frac{k+1}{2} \frac{2}{k+4} \frac{2}{k+2} \frac{2}{k} \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}$$

$$= \frac{3}{8\cdot 2\cdot 2} 2^{d-2} \pi^{d/2} (d+n)(d+n+2) \Gamma\left(\frac{d+n}{2}\right) \frac{1}{a^{\frac{d+n+4}{2}}} \underbrace{\left(\prod_{k=1}^{d-2} \frac{(k+1)(k+3)}{k(k+2)(k+4)} \right)}_{=\frac{8(d+1)(d-1)}{\Gamma(d+3)}} \underbrace{\left(\prod_{k=1}^{d-2} \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \right)}_{=\frac{\Gamma\left(\frac{(d-2)+1}{2}\right)}{\Gamma(1/2)}}$$

$$= 3\pi^{\frac{d-1}{2}} 2^{d-4} (d+n)(d+n+2)(d+1)(d-1) \frac{\Gamma\left(\frac{d+n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right)}{\Gamma(d+3)} \frac{1}{a^{\frac{d+n+4}{2}}}. \qquad (15)$$

$$= 3\pi^{\frac{d-1}{2}} 2^{d-4} \frac{(d+n)(d+n+2)\cancel{(d+1)}\cancel{(d-1)}}{(d+2)\cancel{(d+1)}\, d\, \cancel{(d-1)}} \frac{\Gamma\left(\frac{d+n}{2}\right)\cancel{\Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right)}}{\Gamma(d-1)} \frac{1}{a^{\frac{d+n+4}{2}}}$$

D'autre part :

$$c = \int_{\mathbb{R}^d} d\underline{x}\, |\underline{x}|^n e^{-ax^2} x_1^2 x_2^2$$

$$= \int_0^\infty dr\, r^n e^{-ar^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta_1 \cdots \int_0^\pi d\theta_{d-2}\, r^4 \cos^2\varphi \sin^2\varphi \left(\prod_{k=1}^{d-2} (\sin\theta_k)^4 \right) r^{d-1} \left(\prod_{k=1}^{d-2} (\sin\theta_k)^k \right)$$

$$= \frac{b}{\int_0^{2\pi} d\varphi\, \cos^4\varphi} \int_0^{2\pi} d\varphi\, \cos^2\varphi \sin^2\varphi$$

$$= b\, \frac{4}{3\pi} \frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{b}{3}. \qquad (16)$$

Les résultats (15) et (16) dans (14) fournissent le résultat cherché. A nouveau, on vérifie que cette relation est valable en dimension $d=2$ (et $d=3$).

#

Calcul de L_c avec $X = Y = D_{ij}(\underline{V}) : V_\eta^*$ ① ©

$$\int_{\mathbb{R}^d} d\underline{V}_1 \, Y(\underline{V}_1) L_c[\mathcal{M}X] = -\sigma^{d-1} \int_{\mathbb{R}^{2d}} d\underline{V}_1 d\underline{V}_2 \, f^{(0)}(\underline{V}_1) \mathcal{M}(\underline{V}_2) X(\underline{V}_2) \int d\hat{\sigma} \, \theta(\hat{\sigma}\cdot\underline{V}_{12}) (\hat{\sigma}\cdot\underline{V}_{12}) (b-1) \left[Y(\underline{V}_1) + Y(\underline{V}_2) \right] \quad (1)$$

Avec:

$$D_{ij}(V) = m\left(V_i V_j - \frac{1}{d} V^2 \delta_{ij} \right) \quad (2)$$

$$b\,\underline{V}_{\frac{1}{2}} = \underline{V}_{\frac{1}{2}} \mp (\underline{V}_{12}\cdot\hat{\sigma})\,\hat{\sigma} \quad (3)$$

On a donc:

$$(b-1)\left[Y(V_1) + Y(V_2)\right] = m(b-1)\left[V_{1i}V_{1j} + V_{2i}V_{2j}\right] + \underbrace{m(b-1)\left[-\frac{1}{d}V_1^2\delta_{ij} - \frac{1}{d}V_2^2\delta_{ij}\right]}_{①} \quad (4)$$

$$\begin{aligned}
① &= -\frac{m}{d}\delta_{ij}(b-1)\left(V_1^2 + V_2^2\right) \\
&= -\frac{m}{d}\delta_{ij}\left[-V_1^2 - V_2^2 + \left(V_1 - (\underline{V}_{12}\cdot\hat{\sigma})\hat{\sigma}\right)^2 + \left(V_2 + (\underline{V}_{12}\cdot\hat{\sigma})\hat{\sigma}\right)^2\right] \\
&= -\frac{m}{d}\delta_{ij}\left[-V_1^2 - V_2^2 + V_1^2 - 2(V_{12}\cdot\hat{\sigma})(V_1\cdot\hat{\sigma}) + (\underline{V}_{12}\cdot\hat{\sigma})^2 + V_2^2 + 2(\underline{V}_{12}\cdot\hat{\sigma})(V_2\cdot\hat{\sigma}) + (\underline{V}_{12}\cdot\hat{\sigma})^2\right] \\
&= -2\frac{m}{d}\delta_{ij}(\underline{V}_{12}\cdot\hat{\sigma})\left[-(V_1\cdot\hat{\sigma}) + (V_2\cdot\hat{\sigma}) + \underbrace{(V_{12}\cdot\hat{\sigma})}_{= V_1\cdot\hat{\sigma} - V_2\cdot\hat{\sigma}}\right] \\
&= 0
\end{aligned} \quad (5)$$

(5) dans (4), puis (4) dans (1) donne:

$$\int_{\mathbb{R}^d} dV_1 \, D_{ij}(V_1) L_c[\mathcal{M} D_{ij}] = -m\sigma^{d-1}\int_{\mathbb{R}^{2d}} d\underline{V}_1 d\underline{V}_2 \, f^{(0)}(V_1)\mathcal{M}(V_2) D_{ij}(V_2) \int d\hat{\sigma}\,\theta(\hat{\sigma}\cdot\underline{V}_{12})(\hat{\sigma}\cdot\underline{V}_{12})(b-1)\left[V_{1i}V_{1j} + V_{2i}V_{2j}\right] \quad (6)$$

A l'aide de (3), on obtient (en notant $g = \underline{V}_{12}$):

$$\begin{aligned}
(b-1)\left[V_{1i}V_{1j} + V_{2i}V_{2j}\right] &= \left(V_{1i} - (g\cdot\hat{\sigma})\sigma_i\right)\left(V_{1j} - (g\cdot\hat{\sigma})\sigma_j\right) + \left(V_{2i} + (g\cdot\hat{\sigma})\sigma_i\right)\left(V_{2j} + (g\cdot\hat{\sigma})\sigma_j\right) - V_{1i}V_{1j} - V_{2i}V_{2j} \\
&= -V_{1i}(g\cdot\hat{\sigma})\sigma_j - V_{1j}(g\cdot\hat{\sigma})\sigma_i + V_{2i}(g\cdot\hat{\sigma})\sigma_j + V_{2j}(g\cdot\hat{\sigma})\sigma_i + (g\cdot\hat{\sigma})^2\sigma_i\sigma_j\cdot 2 \\
&= -\underbrace{(V_{1i} - V_{2i})}_{= g_i}(g\cdot\hat{\sigma})\sigma_j - \underbrace{(V_{1j} - V_{2j})}_{= g_j}(g\cdot\hat{\sigma})\sigma_i + 2(g\cdot\hat{\sigma})^2\sigma_i\sigma_j \\
&= (g\cdot\hat{\sigma})\left[-g_i\sigma_j - g_j\sigma_i + 2(g\cdot\hat{\sigma})\sigma_i\sigma_j\right]
\end{aligned} \quad (7)$$

Insérant (7) dans (6):

$$\boxed{\int_{\mathbb{R}^d} dV_1 \, D_{ij}(V_1) L_c[\mathcal{M} D_{ij}] = -m\sigma^{d-1}\int_{\mathbb{R}^{2d}} dV_1 dV_2 \, f^{(0)}(V_1)\mathcal{M}(V_2) D_{ij}(V_2) \int d\hat{\sigma}\,\theta(g\cdot\hat{\sigma})(g\cdot\hat{\sigma})^2\left[-g_i\sigma_j - g_j\sigma_i + 2(g\cdot\hat{\sigma})\sigma_i\sigma_j\right]} \quad (8)$$

L'intégration (8) étant assez complexe, il peut être utile de regarder le cas inélastique pour comparer avec la littérature et s'assurer que la méthode de calcul est bien correcte. La loi de collision s'écrit alors $b\,\underline{V}_{\frac{1}{2}} = \underline{V}_{\frac{1}{2}} \mp \frac{1+\tilde{\alpha}}{2}(g\cdot\hat{\sigma})\hat{\sigma}$, avec $\tilde{\alpha} \in [0,1]$ le coefficient de restitution. Il suffira ensuite de prendre $\tilde{\alpha} = 1$ dans notre cas. On obtient donc:

$$\int_{\mathbb{R}^d} dV_1 \, D_{ij}(V_1) L_c[\mathcal{M} D_{ij}] = -m\sigma^{d-1}\int_{\mathbb{R}^{2d}} dV_1 dV_2 \, f^{(0)}(V_1)\mathcal{M}(V_2) D_{ij}(V_2) \frac{1+\tilde{\alpha}}{2}\int d\hat{\sigma}\,\theta(g\cdot\hat{\sigma})(g\cdot\hat{\sigma})^2\left[-g_i\sigma_j - g_j\sigma_i + (1+\tilde{\alpha})(g\cdot\hat{\sigma})\sigma_i\sigma_j\right] \quad (9)$$

Nous allons vérifier les résultats en dimension 3 et 2 avant de reprendre l'expression générale publiée dans [10].

__Lemme__: en dimension $d=3$, on a:

$$-\int d\hat{\sigma}\,\theta(g\cdot\hat{\sigma})(g\cdot\hat{\sigma})(b-1)\left[V_{1i}V_{1j} + V_{2i}V_{2j}\right] = \frac{\pi}{8}(1+\tilde{\alpha})(3-\tilde{\alpha})|g|\,g_i g_j - \frac{\pi}{24}(1+\tilde{\alpha})^2|g|^3\delta_{ij}, \quad (10)$$

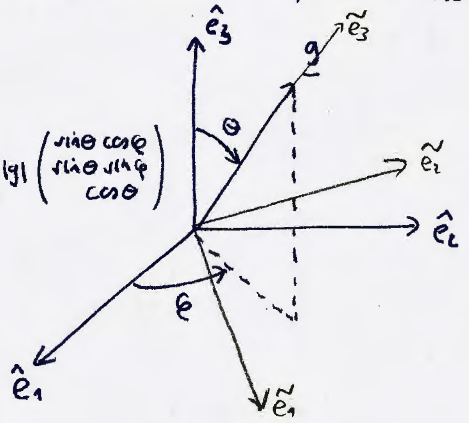
d'où:

$$\int_{\mathbb{R}^d} dV_1 \, D_{ij}(V_1) L_c[\mathcal{M} D_{ij}] = +m\sigma^{d-1}\int_{\mathbb{R}^{2d}} dV_1 dV_2 \, f^{(0)}(V_1)\mathcal{M}(V_2) D_{ij}(V_2)\, \frac{\pi}{8}(1+\tilde{\alpha})(3-\tilde{\alpha})|g|\,g_i g_j \quad (11)$$

Preuve: supposons (10) vraie, alors comme D_{ij} est un tenseur de trace nulle, on a

$$D_{ij}(V_2)\,\delta_{ij} = Tr(D) = 0,$$

et donc la contribution du second terme du membre de droite de (10) est nulle, ce qui établit (11). Notons que (10) est bien ce qui est trouvé dans [\cite{premier3}]. La généralisation de ce calcul en dimension arbitraire d a été faite, et les résultats finaux pour les coefficients de transport sont dans [10]. Les calculs intermédiaires ne sont néanmoins pas présentés. Ceci indique donc juste que le calcul en dimension arbitraire est possible.
Pour calculer (10), choisissons un repère $\{\tilde{e}_i\}_{i=1}^{3}$ pour lequel $\tilde{e}_3$ est choisi dans la direction fixée de $\underline{g}$.



$$\underline{g} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix} = |g| \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

Choisissons de plus $\tilde{e}_2$ dans le plan engendré par $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2\}$.
On a alors dans la base canonique

$$\tilde{e}_3 = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix};\ \tilde{e}_2 = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix};\ \tilde{e}_1 = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi \\ -\sin\theta \end{pmatrix}$$

et on vérifie que $\tilde{e}_i\tilde{e}_j = \delta_{ij}$. L'inversion donne dans la base $\{\tilde{e}_i\}$:

$$\hat{e}_1 = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi \\ -\sin\varphi \\ \sin\theta\cos\varphi \end{pmatrix};\ \hat{e}_2 = \begin{pmatrix} \cos\theta\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \end{pmatrix};\ \hat{e}_3 = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ 0 \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

Notons qu'il existe une infinité de choix de repères tels que $\tilde{e}_3$ soit parallèle à $\underline{g}$. Nous avons pris celui qui a priori engendre les vecteurs de base les plus simples. Un autre choix peut être plus judicieux pour une généralisation en dimension arbitraire. Un tel repère va permettre d'exprimer simplement la condition $\Theta(\underline{g}\cdot\hat{\sigma})$. Ainsi en reprenant l'Eq. (3) mais en notant $\tilde{\theta}$ l'angle entre $\underline{g}$ et $\hat{\sigma}$ et donc $\{\tilde{\theta}, \tilde{\varphi}\}$ les variables d'intégration de l'angle solide :

$$-\int d\hat{\sigma}\,\Theta(\underline{g}\cdot\hat{\sigma})(\underline{g}\cdot\hat{\sigma})(b-1)\left[V_{1i}V_{1j} + V_{2i}V_{2j}\right] = \frac{1+\tilde{\alpha}}{2}\int d\hat{\sigma}\,\Theta(\underline{g}\cdot\hat{\sigma})(\underline{g}\cdot\hat{\sigma})^2\left[-g_i\sigma_j - g_j\sigma_i + (1+\tilde{\alpha})(\underline{g}\cdot\hat{\sigma})\sigma_i\sigma_j\right]$$

$$= -\frac{1+\tilde{\alpha}}{2}\int_0^{2\pi} d\tilde{\varphi}\int_0^{\pi} d\tilde{\theta}\,\sin\tilde{\theta}\,\Theta(\cos\tilde{\theta})\,|g|^2\cos^2\tilde{\theta}\left[-g_i\sigma_j - g_j\sigma_i + (1+\tilde{\alpha})|g|\cos\tilde{\theta}\,\sigma_i\sigma_j\right]$$

Comme g_i sont les composantes cartésiennes de $\underline{g}$, il faut exprimer $\hat{\sigma}$ dans la base canonique en fonction des angles $\tilde{\varphi}$ et $\tilde{\theta}$:

$$\begin{aligned}
\hat{\sigma} = \sigma_1\hat{e}_1 + \sigma_2\hat{e}_2 + \sigma_3\hat{e}_3 &= \sin\tilde{\theta}\cos\tilde{\varphi}\,\tilde{e}_1 + \sin\tilde{\theta}\sin\tilde{\varphi}\,\tilde{e}_2 + \cos\tilde{\theta}\,\tilde{e}_3 \\
&= \sin\tilde{\theta}\cos\tilde{\varphi}\,(\cos\theta\cos\varphi\,\hat{e}_1 + \cos\theta\sin\varphi\,\hat{e}_2 - \sin\theta\,\hat{e}_3) \\
&\quad + \sin\tilde{\theta}\sin\tilde{\varphi}\,(-\sin\varphi\,\hat{e}_1 + \cos\varphi\,\hat{e}_2) \\
&\quad + \cos\tilde{\theta}\,(\sin\theta\cos\varphi\,\hat{e}_1 + \sin\theta\sin\varphi\,\hat{e}_2 + \cos\theta\,\hat{e}_3) \\
&= \hat{e}_1\underbrace{\left[\sin\tilde{\theta}\cos\tilde{\varphi}\cos\theta\cos\varphi - \sin\tilde{\theta}\sin\tilde{\varphi}\sin\varphi + \cos\tilde{\theta}\sin\theta\cos\varphi\right]}_{=\sigma_1} \\
&\quad + \hat{e}_2\underbrace{\left[\sin\tilde{\theta}\cos\tilde{\varphi}\cos\theta\sin\varphi + \sin\tilde{\theta}\sin\tilde{\varphi}\cos\varphi + \cos\tilde{\theta}\sin\theta\sin\varphi\right]}_{=\sigma_2} \\
&\quad + \hat{e}_3\underbrace{\left[-\sin\tilde{\theta}\cos\tilde{\varphi}\sin\theta + \cos\tilde{\theta}\cos\theta\right]}_{=\sigma_3}
\end{aligned}$$

La relation étant symétrique, on vérifie que les 6 composantes indépendantes donnent le résultat du lemme.

- cas $i=j=3$:

$$-\frac{1+\tilde{\alpha}}{2}|g|^2\int_0^{2\pi} d\tilde{\varphi}\int_0^{\pi/2} d\tilde{\theta}\,\cos^2\tilde{\theta}\sin\tilde{\theta}\left[(1+\tilde{\alpha})|g|\cos\tilde{\theta}\underbrace{\left(-\sin\tilde{\theta}\cos\tilde{\varphi}\sin\theta + \cos\tilde{\theta}\cos\theta\right)^2}_{=\sin^2\tilde{\theta}\cos^2\tilde{\varphi}\sin^2\theta + \cos^2\tilde{\theta}\cos^2\theta + \cancel{\dots}\to 0} - 2g_3\left(-\sin\tilde{\theta}\cancel{\cos\tilde{\varphi}}\sin\theta + \cos\tilde{\theta}\cos\theta\right)\right]$$

$$= -\frac{1+\tilde{\alpha}}{2}|g|\int_0^{2\pi} d\tilde{\varphi}\int_0^{\pi/2} d\tilde{\theta}\left[(1+\tilde{\alpha})\Big(\underbrace{\sin\tilde{\theta}^3\cos\tilde{\theta}^3\cos\tilde{\varphi}^2}_{\to\pi/12}\underbrace{|g|^2\sin^2\theta}_{=|g|^2-\underbrace{|g|^2\cos^2\theta}_{=g_3g_3}} + \underbrace{\cos\tilde{\theta}^5\sin\tilde{\theta}}_{\to\pi/3}\underbrace{|g|^2\cos\theta^2}_{=g_3g_3}\Big) - 2g_3\underbrace{|g|\cos\theta}_{=g_3}\underbrace{\cos\tilde{\theta}^3\sin\tilde{\theta}}_{\to\pi/2}\right]$$

$$= -\frac{1+\tilde{\alpha}}{2}\pi|g|\left[(1+\tilde{\alpha})\left(\frac{1}{12}|g|^2 - \frac{1}{12}g_3g_3 + \frac{1}{3}g_3g_3\right) - g_3g_3\right]$$

$$= -\frac{\pi}{8}(1+\tilde{\alpha})|g|\,g_3g_3\left[(1+\tilde{\alpha})\frac{1}{3}(4-1) - 4\right] - \frac{\pi}{24}(1+\tilde{\alpha})^2|g|^3$$

$$= \frac{\pi}{8}(1+\tilde{\alpha})(3-\tilde{\alpha})|g|\,g_3g_3 - \frac{\pi}{24}(1+\tilde{\alpha})^2|g|^3$$

• cas $i=j=1$:

$$-\frac{1+\tilde\alpha}{2}|g|^2\int_0^{2\pi}d\tilde\varphi\int_0^{\pi/2}d\tilde\theta\,\cos^2\tilde\theta\sin\tilde\theta\Big[(1+\tilde\alpha)|g|\cos\tilde\theta\big(\sin\tilde\theta^2\cos\tilde\varphi^2\cos\theta^2\cos\varphi^2+2\sin^2\tilde\theta\cos\tilde\varphi\cos\theta\cos\varphi(-1)\sin\tilde\varphi\sin\varphi+\sin\tilde\theta^2\sin\tilde\varphi^2\sin\varphi^2+2\sin\tilde\theta\cos\tilde\varphi\cos\theta\cos\varphi\cos\tilde\theta\sin\theta-2\sin\tilde\theta\sin\tilde\varphi\sin\varphi\cos\tilde\theta\sin\theta\cos\varphi+\cos\tilde\theta^2\sin^2\theta\cos\varphi^2\big)-2g_1\big(\sin\tilde\theta\cos\tilde\varphi\cos\theta\cos\varphi-\sin\tilde\theta\sin\tilde\varphi\sin\varphi+\cos\tilde\theta\sin\theta\cos\varphi\big)\Big]$$

$$=-\frac{1+\tilde\alpha}{2}|g|^2\int_0^{2\pi}d\tilde\varphi\int_0^{\pi/2}d\tilde\theta\Big[(1+\tilde\alpha)|g|\big(\underbrace{\sin\tilde\theta^3\cos\tilde\theta^3\cos\tilde\varphi^2}_{\to\pi/12}\cos\theta^2\cos\varphi^2+\underbrace{\sin\tilde\theta^3\cos\tilde\theta^3\sin\tilde\varphi^2}_{\to\pi/12}\sin\varphi^2+\underbrace{\cos\tilde\theta^5\sin\tilde\theta}_{\to\pi/3}\sin^2\theta\cos^2\varphi\big)-2g_1\underbrace{\cos\tilde\theta^3\sin\tilde\theta}_{\to\pi/2}\sin\theta\cos\varphi\Big]$$

$$=-\frac{1+\tilde\alpha}{2}\pi|g|\Big[(1+\tilde\alpha)\Big(\frac{1}{12}|g|^2\cos^2\theta\cos\varphi^2+\frac{1}{12}|g|^2\sin\varphi^2+\frac13|g|^2\sin^2\theta\cos^2\varphi\Big)-2g_1\frac12\underbrace{|g|\sin\theta\cos\varphi}_{=g_1}\Big]$$

$$=-\frac{\pi}{2}(1+\tilde\alpha)|g|\Big[\frac{1+\tilde\alpha}{12}|g|^2\big(\cos^2\theta\cos^2\varphi+\sin^2\varphi+4\sin^2\theta\cos^2\varphi\big)-g_1g_1\Big]$$

$$\cos^2\theta\cos^2\varphi+\sin^2\varphi+4\sin^2\theta\cos^2\varphi=\underbrace{\underbrace{\cos^2\theta\cos^2\varphi+\cos^2\varphi\sin^2\theta}_{=\cos^2\varphi}+\sin^2\varphi}_{=1}+3\underbrace{\cos^2\varphi\sin^2\theta}_{=g_1g_1/|g|^2}$$

$$=-\frac{\pi}{24}(1+\tilde\alpha)^2|g|^3-\frac{\pi}{2}(1+\tilde\alpha)|g|\,g_1g_1\underbrace{\Big(\frac{1+\tilde\alpha}{12}\cdot3-\frac{12}{12}\Big)}_{=\frac14(1+\tilde\alpha-4)}$$

$$=\frac{\pi}{8}(1+\tilde\alpha)(3-\tilde\alpha)|g|g_1g_1-\frac{\pi}{24}(1+\tilde\alpha)^2|g|^3$$

• cas $i=1,\ j=3$:

$$I=-\frac{1+\tilde\alpha}{2}\int_0^{2\pi}d\tilde\varphi\int_0^{\pi/2}d\tilde\theta\,|g|^2\sin\tilde\theta\cos^2\tilde\theta\Big[(1+\tilde\alpha)|g|\cos\tilde\theta\,\sigma_1\sigma_3-\sigma_1g_3-\sigma_3g_1\Big]$$

$$=-\frac{1+\tilde\alpha}{2}|g|^3\int_0^{2\pi}d\tilde\varphi\int_0^{\pi/2}d\tilde\theta\,\sin\tilde\theta\cos^2\tilde\theta\Big[(1+\tilde\alpha)\cos\tilde\theta\{\sin\tilde\theta\cos\tilde\varphi\cos\theta\cos\varphi-\sin\tilde\theta\sin\tilde\varphi\sin\varphi+\cos\tilde\theta\sin\theta\cos\varphi\}\times\{\cos\tilde\theta\cos\theta-\sin\tilde\theta\cos\tilde\varphi\sin\theta\}-(\sin\tilde\theta\cos\tilde\varphi\cos\theta\cos\varphi-\sin\tilde\theta\sin\tilde\varphi\sin\varphi+\cos\tilde\theta\sin\theta\cos\varphi)\cos\theta-(\cos\tilde\theta\cos\theta-\sin\tilde\theta\cos\tilde\varphi\sin\theta)\sin\theta\cos\varphi\Big]$$

$$=-\frac{1+\tilde\alpha}{2}|g|^3\int_0^{2\pi}d\tilde\varphi\int_0^{\pi/2}d\tilde\theta\Big[(1+\tilde\alpha)\sin\tilde\theta\cos^3\tilde\theta\{0-\underbrace{\sin^2\tilde\theta\cos^2\tilde\varphi}_{\to\pi/12}\cos\theta\cos\varphi\sin\theta+0+0+\overbrace{\cos^2\tilde\theta}^{\pi/3}\sin\theta\cos\varphi\cos\theta\}-\underbrace{\cos^3\tilde\theta\sin\theta\cos\varphi\cos\theta\sin\tilde\theta}_{\to\frac{\pi}{2}\sin\theta\cos\varphi\cos\theta\,=g_1g_3/g^2}-\underbrace{\cos^3\tilde\theta\cos\theta\sin\theta\cos\varphi\sin\tilde\theta}_{\to\frac{\pi}{2}\cos\theta\sin\theta\cos\varphi\,=g_1g_3/g^2}\Big]$$

$$=-\frac{1+\tilde\alpha}{2}|g|\Big((1+\tilde\alpha)\Big\{-\frac{\pi}{12}\underbrace{\cos\theta\cos\varphi\sin\theta|g|^2}_{=g_1g_3}+\frac{\pi}{3}\underbrace{\cos\varphi\cos\theta\sin\theta|g|^2}_{=g_1g_3}\Big\}-\pi g_1g_3\Big)$$

$$=-\pi\frac{1+\tilde\alpha}{2}|g|g_1g_3\Big[(1+\tilde\alpha)\underbrace{\Big(\frac13-\frac1{12}\Big)}_{=\frac{3}{12}=\frac14}-1\Big]$$

$$=-\frac{\pi}{8}(1+\tilde\alpha)(1+\tilde\alpha-4)g_1g_3$$

$$=\frac{\pi}{8}(1+\tilde\alpha)(3-\tilde\alpha)|g|g_1g_3$$

• cas $i=1, j=2$:

$$I = -\frac{1+\tilde\alpha}{2}\int_0^{2\pi} d\tilde\varphi \int_0^{\pi/2} d\tilde\theta\, |g|^2 \sin\tilde\theta \cos^2\tilde\theta \left[(1+\tilde\alpha)\,|g| \cos\tilde\theta\, \sigma_1\sigma_2 - \sigma_1 g_2 - \sigma_2 g_1 \right]$$

$$= -\frac{1+\tilde\alpha}{2}\int_0^{2\pi} d\tilde\varphi \int_0^{\pi/2} d\tilde\theta\, |g|^2 \sin\tilde\theta \cos^2\tilde\theta \Big[(1+\tilde\alpha) \cos\tilde\theta \left(\sin\tilde\theta\cos\tilde\varphi\cos\theta\cos\varphi - \sin\tilde\theta\sin\tilde\varphi\sin\varphi + \cos\tilde\theta\sin\theta\cos\varphi\right)$$
$$\times\left(\sin\tilde\theta\cos\tilde\varphi\cos\theta\sin\varphi + \sin\tilde\theta\sin\tilde\varphi\cos\varphi + \cos\tilde\theta\sin\theta\sin\varphi\right)$$
$$-\left(\sin\tilde\theta\cos\tilde\varphi\cos\theta\cos\varphi - \sin\tilde\theta\sin\tilde\varphi\sin\varphi + \cos\tilde\theta\sin\theta\cos\varphi\right)\sin\theta\sin\varphi \quad (\to g_1 g_2/g^2)$$
$$-\left(\sin\tilde\theta\cos\tilde\varphi\cos\theta\sin\varphi + \sin\tilde\theta\sin\tilde\varphi\cos\varphi + \cos\tilde\theta\sin\theta\sin\varphi\right)\sin\theta\cos\varphi \Big]$$

$$= -\frac{1+\tilde\alpha}{2}|g|\int_0^{2\pi} d\tilde\varphi \int_0^{\pi/2} d\tilde\theta \Big[(1+\tilde\alpha)|g|^2 \sin\tilde\theta\cos^3\tilde\theta \big(\underbrace{\sin^2\tilde\theta\cos^2\tilde\varphi}_{\pi/12}\cos^2\theta\cos\varphi\sin\varphi + 0 + 0 + 0 \quad (\to g_1g_2/g^2)$$
$$- \underbrace{\sin\tilde\theta^2\sin\tilde\varphi^2}_{\pi/12}\sin\varphi\cos\varphi + 0 + 0 + 0 + \underbrace{\cos\tilde\theta^2}_{\to\pi/3}\sin\theta^2\cos\varphi\sin\varphi\big)$$
$$- \underbrace{\sin\tilde\theta\cos^3\tilde\theta}_{\pi/2}\, g_1 g_2 - \underbrace{\sin\tilde\theta\cos^3\tilde\theta}_{\pi/2}\, g_1 g_2 \Big]$$

$$= -\frac{1+\tilde\alpha}{2}|g|\,\pi\left((1+\tilde\alpha)|g|^2\left\{ \frac{1}{12}\underbrace{\cos^2\theta}_{=1-\sin^2\theta}\cos\varphi\sin\varphi - \frac{1}{12}\cos\varphi\sin\varphi + \frac{1}{3}\sin^2\theta\cos\varphi\sin\varphi \right\} - g_1 g_2\right)$$

$$= -\frac{1+\tilde\alpha}{2}|g|\,\pi\left[\frac{(1+\tilde\alpha)}{3}|g|^2\left(\frac{1}{4}\cos\varphi\sin\varphi - \frac{1}{4}\underbrace{\sin^2\theta\cos\varphi\sin\varphi}_{=g_1g_2/|g|^2} - \frac{1}{4}\cos\varphi\sin\varphi + \underbrace{\sin^2\theta\cos\varphi\sin\varphi}_{=g_1g_2/|g|^2}\right) - g_1g_2\right]$$

$$= -\frac{1+\tilde\alpha}{2}|g|\,\pi\left[(1+\tilde\alpha)\frac{3}{12} g_1 g_2 - g_1 g_2\right]$$

$$= -\frac{\pi}{8}(1+\tilde\alpha)|g|\, g_1 g_2 \left[1+\tilde\alpha - 4\right]$$

$$= \frac{\pi}{8}(1+\tilde\alpha)(3-\tilde\alpha)|g|\, g_1 g_2$$

#

• cas $i=2, j=3$, et $i=2, j=2$: calculs similaires en tout point. ##

Avec ce lemme, l'Eq. (8) devient :

$$\int_{\mathbb{R}^3} dv_1\, D_{ij}(v_1)\, L_c[\mathcal{M} D_{ij}] = \frac{\pi}{8}(1+\tilde\alpha)(3-\tilde\alpha)\, m\sigma^2 \int_{\mathbb{R}^{2\times 3}} d\underline{v_1}\, d\underline{v_2}\, f^{(0)}(\underline{v_1})\, \mathcal{M}(\underline{v_2})\, D_{ij}(\underline{v_2})\, g_i g_j\, |g| \qquad (12).$$

Changement de variables : $\underline{v_1} \mapsto \underline{v}$, $\underline{v_2} \mapsto \underline{g} = \underline{v_1} - \underline{v_2}$; $J = 1$, donc $\underline{v_2} = \underline{v} - \underline{g}$. Ainsi :

$$D_{ij}(v-g)\,g_i g_j = m\left((v-g)_i (v-g)_j - \tfrac{1}{3}(v-g)^2\delta_{ij}\right) g_i g_j$$
$$= m\Big(\underbrace{v_i v_j g_i g_j}_{=(v\cdot g)^2} - \underbrace{v_i g_j g_i g_j}_{=(v\cdot g)g^2} - \underbrace{v_j g_i g_i g_j}_{=(v\cdot g)g^2} + \underbrace{g_i g_j g_i g_j}_{=g^4} - \tfrac{1}{3}v^2 \underbrace{g_i g_j \delta_{ij}}_{=g^2} - \tfrac{1}{3}g^2 \underbrace{g_i g_j \delta_{ij}}_{=g^2} + \tfrac{2}{3}(v\cdot g)\underbrace{g_i g_j \delta_{ij}}_{=g^2}\Big)$$
$$= m\left((v\cdot g)^2 - 2(v\cdot g)g^2 + \tfrac{2}{3}(v\cdot g)g^2 + g^4 - \tfrac{1}{3}g^4 - \tfrac{1}{3}v^2 g^2\right)$$
$$= m\left((v\cdot g)^2 - \tfrac{4}{3}(v\cdot g)g^2 + \tfrac{2}{3}g^4 - \tfrac{1}{3}v^2 g^2\right)$$

$$\mathcal{M}(v-g) = \frac{n}{V_T^3}\frac{1}{\pi^{3/2}} e^{-(v-g)^2/V_T^2} = \frac{n}{V_T^3}\frac{1}{\pi^{3/2}} e^{-v^2/V_T^2} e^{-g^2/V_T^2} e^{+2(v\cdot g)/V_T^2}$$

L'Eq. (12) devient :

$$\int_{\mathbb{R}^3} dv_1\, D_{ij}(v_1)\, L_c[\mathcal{M} D_{ij}] = \frac{\pi}{8}\left[4-(1-\tilde\alpha)^2\right] m\sigma^2 \frac{n}{V_T^3}\frac{1}{\pi^{3/2}}\, m \int_{\mathbb{R}^3} dv\, f^{(0)}(\underline{v})\, e^{-v^2/V_T^2}\int_{\mathbb{R}^3} dg\, e^{-g^2/V_T^2} e^{2(v\cdot g)/V_T^2} |g| \;\times$$
$$\times\left((v\cdot g)^2 - \tfrac{4}{3}(v\cdot g)g^2 + \tfrac{2}{3}g^4 - \tfrac{1}{3}v^2 g^2\right)$$

$$\underset{g = \underline{g}/V_T}{\overset{u = \underline{v}/V_T}{=}} \frac{\pi}{8}\left[4-(1-\tilde\alpha)^2\right] m^2\sigma^2 \frac{n}{\pi^{3/2}} V_T^3 \int_{\mathbb{R}^3} du\, f^{(0)}(V_T u)\, e^{-u^2}\int_{\mathbb{R}^3} dg\, e^{-g^2} e^{2|u||g|\cos\theta}\, |g|\, V_T \;\times$$
$$\times\, V_T^4\left(|u|^2|g|^2\cos^2\theta - \tfrac{4}{3}|u||g|^3\cos\theta + \tfrac{2}{3}g^4 - \tfrac{1}{3}u^2 g^2\right)$$

$$= \frac{\pi}{8}\left[4-(1-\tilde{\alpha})^2\right] m^2\sigma^2 \frac{n}{\pi^{3/2}} V_T^8 \int_0^\infty dx\, f^{(0)}(V_T x)\, e^{-x^2} x^2 \underbrace{\int d\Omega}_{=4\pi} \int_0^\infty dg\, g^3 e^{-g^2} \underbrace{\int^{2\pi} d\varphi}_{=2\pi} \int_0^\pi d\theta\, \sin\theta\, e^{2gx\cos\theta} \left(x^2g^2\cos^2\theta - \frac{4}{3}xg^3\cos\theta + \frac{2}{3}g^4 - \frac{1}{3}x^2g^2\right)$$

$$\overset{Y=\cos\theta}{=} \pi^3\left[4-(1-\tilde{\alpha})^2\right] m^2\sigma^2 \frac{n}{\pi^{3/2}} V_T^8 \int_0^\infty dx\, f^{(0)}(V_T x)\, e^{-x^2} x^2 \int_0 dg\, g^5 e^{-g^2} \underbrace{\int_{-1}^{1} dy\, e^{2gxy}\left(x^2y^2 - \frac{4}{3}xgy + \frac{2}{3}g^4 - \frac{1}{3}x^2\right)}$$

$$= \frac{e^{2gx}}{12g^3x}\left(3+4g^2+4g^4-6gx-8g^3x+4g^2x^2\right) + \frac{e^{-2gx}}{12g^3x}\left(-3-4g^2-4g^4-6gx-8g^3x-4g^2x^2\right)$$

$$= \frac{1}{x}\left[2x + 2e^{x^2}\sqrt{\pi}\,\left(\frac{1}{2}+x^2\right)\mathrm{Erf}(x)\right] \quad ; \mathrm{Erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x dt\, e^{-t^2}$$

$$= 2\pi^3\left[4-(1-\tilde{\alpha})^2\right] m^2\sigma^2 \frac{n}{\pi^{3/2}} V_T^8 \int_0^\infty dx\, f^{(0)}(V_T x)\, x\left[x e^{-x^2} + \left(\frac{1}{2}+x^2\right)\sqrt{\pi}\,\mathrm{Erf}(x)\right] \tag{13}$$

A titre de vérification, on montre que le coefficient de transport ν_η de l'Eq. (13) est le même que celui de l'Eq. (B.12) de \cite{premier} :

$$\nu_\eta^* = \frac{\beta^2}{(3+2)(3-1)\,n\,\nu_0}\, 2\pi^3\left[4-(1-\tilde{\alpha})^2\right] m^2\sigma^2 \frac{n^2}{\pi^{3/2}} V_T^5 \int_0^\infty dx\, \frac{V_T^3}{n} f^{(0)}(V_T x)\, x\left[x e^{-x^2} + \left(\frac{1}{2}+x^2\right)\sqrt{\pi}\,\mathrm{Erf}(x)\right]$$

$$= \frac{\beta^2}{10\,\nu_0}\, 2\pi^{3/2} m^2 \left(\frac{2}{\beta m}\right)^{5/2} \left[4-(1-\tilde{\alpha})^2\right] n\sigma^2 \int_0^\infty dx\, \frac{V_T^3}{n} f^{(0)}(V_T x)\, x\left[x e^{-x^2} + \left(\frac{1}{2}+x^2\right)\sqrt{\pi}\,\mathrm{Erf}(x)\right]$$

$$= \frac{4\pi}{5\,\nu_0}\sqrt{\frac{2\pi}{\beta m}}\left[4-(1-\tilde{\alpha})^2\right] n\sigma^2 \int_0^\infty dx\, \frac{V_T^3}{n} f^{(0)}(V_T x)\, x\left[x e^{-x^2} + \left(\frac{1}{2}+x^2\right)\sqrt{\pi}\,\mathrm{Erf}(x)\right],$$

ce qui est bien le résultat de \cite{premier}. Ainsi l'Eq. (13) donne :

$$\int_{\mathbb{R}^3} dv_1\, D_{ij}(v_1)\, L_c[\mathcal{M} D_{ij}] = 2\pi^3\left[4-(1-\tilde{\alpha})^2\right] m^2\sigma^2 \frac{n}{\pi^{3/2}} V_T^5 \frac{n}{V_T^3}\frac{1}{\pi^{3/2}} \underbrace{\int_0^\infty dx\, e^{-x^2}\left[1+a_2 S_2(x^2)\right] x\left[x e^{-x^2} + \left(\frac{1}{2}+x^2\right)\sqrt{\pi}\,\mathrm{Erf}(x)\right]}_{=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(1-\frac{1}{32}a_2\right)}$$

$$= \left[4-(1-\tilde{\alpha})^2\right]\sqrt{2\pi}\, m^2 n^2\sigma^2 \left(\frac{2}{\beta m}\right)^{5/2}\left(1-\frac{1}{64}2a_2\right) \tag{14}$$

A nouveau, le coefficient de transport est :

$$\nu_\eta^* = \frac{\beta^2}{10\,n\,\nu_0}\, 4\left[1-\frac{1}{4}(1-\tilde{\alpha})^2\right]\left[1-\frac{1}{64}2a_2\right]\sqrt{2\pi}\, m^2 n^2\sigma^2 \left(\frac{2}{\beta m}\right)^{5/2}$$

$$= \frac{\beta^2}{10 n}\, 4\sqrt{2\pi}\, m^2 n^2 \sigma^2 \left(\frac{2}{\beta m}\right)^{5/2} \frac{5}{16}\frac{1}{n\sigma^2}\sqrt{\frac{m}{\pi k_B T}}\left[1-\frac{1}{4}(1-\tilde{\alpha})^2\right]\left[1-\frac{1}{64}2a_2\right]$$

$$= \frac{\beta^2}{10}\, 4\sqrt{2\pi}\, m^2 \frac{4}{\beta^2 m^2}\sqrt{\frac{2}{\beta m}}\, \frac{5}{16}\sqrt{\frac{m}{\pi k_B T}}\left[1-\frac{1}{4}(1-\tilde{\alpha})^2\right]\left[1-\frac{1}{64}2a_2\right]$$

$$= \left[1-\frac{1}{4}(1-\tilde{\alpha})^2\right]\left[1-\frac{1}{64}2a_2\right], \tag{15}$$

ce qui est bien le résultat (B.13) de \cite{premier}. Nous supposons donc l'expression en dimension arbitraire pour des sphères dures donnée par [10] correcte :

$$\boxed{\nu_\eta^{*,s} = 1 - \frac{1}{64}2a_2} \tag{16}$$

Calcul de $\mathcal{L}_c$ avec $X = Y = S_i(V)$: ν_κ^*, ν_μ^*

Il faut calculer :

$$\int_{\mathbb{R}^d} dV_1\, Y(V_1)\, \mathcal{L}_c[\mathcal{M}X] = -\sigma^{d-1} \int_{\mathbb{R}^{2d}} dV_1 dV_2\, f^{(0)}(V_1)\, \mathcal{M}(V_2)\, S_i(V_2) \int d\hat{\sigma}\, \Theta(\hat{\sigma}\cdot\underline{V}_{12})(\hat{\sigma}\cdot\underline{V}_{12})(b-1)\left[S_i(V_1) + S_i(V_2)\right] \quad (17)$$

A nouveau, nous supposons l'expression finale des coefficients de transport des sphères dures de [10] correcte :

$$\boxed{\nu_\mu^{*,s} = \nu_\kappa^{*,s} = 1 + \frac{1}{64} 2a_2} \quad (18)$$

<u>Coefficients de transport</u>

Nous avons ainsi :

$$\nu_\eta^* \overset{(288)}{=} \frac{\beta^2}{(d+2)(d-1)nV_0} \int_{\mathbb{R}^d} dV\, D_{ij}(V)\, J[\mathcal{M} D_{ij}]$$

$$\overset{(289)}{=} p \frac{\beta^2}{(d+2)(d-1)nV_0} \int_{\mathbb{R}^d} dV\, D_{ij}(V)\, \mathcal{L}_a[\mathcal{M} D_{ij}] + (1-p) \frac{\beta^2}{(d+2)(d-1)nV_0} \int_{\mathbb{R}^d} dV\, D_{ij}(V)\, \mathcal{L}_c[\mathcal{M} D_{ij}]$$

$$= p\, \nu_\eta^{*a} + (1-p)\, \nu_\eta^{*c}$$

$$= p\left[\frac{-12 - 6d + 13d^2 + 5d^3}{8d(d-1)} + a_2 \frac{86 - 196d - 469d^2 - 176d^3 + 12d^4 + 8d^5}{512d(d-1)}\right] + (1-p)\left[\not{1} - \frac{1}{64} 2a_2\right] \quad (19)$$

* facteur conversion rotation

$$\nu_\mu^* = \nu_\kappa^* = p\, \nu_\mu^{*a} + (1-p)\, \nu_\mu^{*c}$$

$$= p\left[\frac{19 + 42d + 24d^2 + 4d^3}{32d} + a_2 \frac{960 - 812d - 3190d^2 - 1255d^3 + 570d^4 + 436d^5 + 72d^6}{2048d^2}\right] + (1-p)\left[\not{1} + \frac{1}{64} 2a_2\right] \quad (20)$$

Valeur des coefficients ν^* du gaz de sphères dures :

- Article Brey, Dufty, Kim & Santos : $d=3$

$$\begin{cases} \zeta^* = \dfrac{1}{\nu_\eta^* - \frac{1}{2}\zeta^*} \\ \kappa^* = \dfrac{2}{3}\dfrac{1+c^*}{\nu_\kappa^* - 2\zeta^*} \\ \mu^* = 2\zeta^* \dfrac{1}{2\nu_\mu^* - 3\zeta^*}\left[\kappa^* + \dfrac{1}{3}\dfrac{c^*}{\zeta^*}\right] \end{cases} \quad ; \; c^* = 2a_2$$

$$\nu_\eta^* = \left[1 - \tfrac{1}{4}(1-\alpha)^2\right]\left[1 - \tfrac{1}{64}c^*\right]$$

$$\nu_\kappa^* = \nu_\mu^* = \tfrac{1}{3}(1+\alpha)\left[1 + \tfrac{33}{16}(1-\alpha) + \tfrac{19-3\alpha}{1024}c^*\right]$$

$$\zeta^* = \tfrac{5}{12}(1-\alpha^2)\left[1 + \tfrac{3}{32}c^*\right]$$

- Livre Poeschel, article Brey + Cubero :

$$\begin{cases} \zeta^* = \dfrac{1}{\nu_\eta^* - \frac{1}{2}\zeta^*} \\ \kappa^* = \dfrac{1+c^*}{\nu_\kappa^* - \frac{2d}{d-1}\zeta^*} \\ \mu^* = 2\zeta^* \dfrac{1}{\frac{2(d-1)}{d}\nu_\kappa^* - 3\zeta^*}\left[\kappa^* + \dfrac{d-1}{2d\zeta^*}c^*\right] \end{cases}$$

$$\nu_\eta^* = \frac{(3-3\alpha+2d)(1+\alpha)}{4d}\left[1 - \tfrac{1}{64}c^*\right]$$

$$\nu_\kappa^* = \nu_\mu^* = \frac{1+\alpha}{d-1}\left[\frac{d-1}{2} + \frac{3(d+8)(1-\alpha)}{16} + \frac{4+5d-3\alpha(4-d)}{1024}c^*\right]$$

$$\zeta^* = \frac{2+d}{4d}(1-\alpha^2)\left[1 + \tfrac{3}{32}c^*\right]$$

- Mon calcul d'annihilation probabiliste :

$$\zeta^* = \frac{1}{\nu_\eta^* - \frac{1}{2}p\,\zeta_T^{(0)*}}$$

$$\kappa^* = \frac{1}{\nu_\kappa^* - 2p\,\zeta_T^{(0)*}}\left[\tfrac{1}{2}p\,\zeta_n^{(0)*}\mu^* + \frac{d-1}{d}(2a_2+1)\right]$$

$$\mu^* = \frac{2}{2\nu_\mu^* - 3p\,\zeta_T^{(0)*} - 2p\,\zeta_n^{(0)*}}\left[p\,\zeta_T^{(0)*}\kappa^* + \frac{d-1}{2d}2a_2\right]$$

Vérification de la cohérence des différentes notations.
Etablissement des coefficients ν_η^* et ν_κ^* du gaz de sphères dures en dimension d dans ma notation.

Cohérence des descriptions de Brey (article) et du livre Poeschel:

Poeschel : $d=3$:

$$\begin{cases} \mathcal{K}^* = \dfrac{1+c^*}{\nu_{\mathcal{K}}^* - \frac{6}{2}\zeta^*} = \dfrac{2}{3}\dfrac{1+c^*}{\frac{2}{3}\nu_{\mathcal{K}}^* - \frac{2}{3}3\zeta^*} = \dfrac{2}{3}\dfrac{1+c^*}{\left(\frac{2}{3}\nu_{\mathcal{K}}^*\right) - 2\zeta^*} \quad \left(\tfrac{2}{3}\nu_{\mathcal{K}}^* = \nu_{\mathcal{K}}^{*\,Brey}\right) \\ \mu^* = 2\zeta^* \dfrac{1}{\frac{2(3-1)}{3}\nu_{\mathcal{K}}^* - 3\zeta^*}\left[\mathcal{K}^* + \dfrac{3-1}{6\zeta^*}c^*\right] = 2\zeta^* \dfrac{1}{2\left(\frac{2}{3}\nu_{\mathcal{K}}^*\right) - 3\zeta^*}\left[\mathcal{K}^* + \dfrac{1}{3}\dfrac{c^*}{\zeta^*}\right] \quad \left(\tfrac{2}{3}\nu_{\mathcal{K}}^* = \nu_{\mathcal{K}}^{*\,Brey}\right) \end{cases}$$

$$\nu_\eta^* = \frac{(3-3\alpha+6)(1+\alpha)}{4\cdot 3}\left[1-\frac{1}{64}c^*\right] = \frac{1}{4}(3-\alpha)(1+\alpha)\left[1-\frac{1}{64}c^*\right] = \frac{1}{4}(3+3\alpha-\alpha-\alpha^2)\left[1-\frac{1}{64}c^*\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[4+2\alpha-\alpha^2-1\right]\left[1-\frac{1}{64}c^*\right] = \left[1-\frac{1}{4}(1-2\alpha+\alpha^2)\right]\left[1-\frac{1}{64}c^*\right]$$

$$= \left[1-\frac{1}{4}(1-\alpha)^2\right]\left[1-\frac{1}{64}c^*\right]$$

$$\nu_{\mathcal{K}}^* = \nu_\mu^* = \frac{1+\alpha}{3-1}\left[\frac{3-1}{2} + \frac{3(3+8)(1-\alpha)}{16} + \frac{4+5\cdot 3-3\alpha(4-3)}{1024}c^*\right]$$

$$= \frac{1+\alpha}{2}\left[1+\frac{33}{16}(1-\alpha) + \frac{19-12\alpha+9\alpha}{1024}c^*\right]$$

$$= \frac{3}{2}\underbrace{\frac{1}{3}(1+\alpha)\left[1+\frac{33}{16}(1-\alpha)+\frac{19-3\alpha}{1024}c^*\right]}_{=\nu_{\mathcal{K}}^{*\,Brey}}$$

$$\zeta^* = \frac{2+3}{4\cdot 3}(1-\alpha^2)\left[1+\frac{3}{32}c^*\right]$$

$$= \frac{5}{12}(1-\alpha^2)\left[1+\frac{3}{32}c^*\right]$$

Conclusion : les équations pour $\mathcal{K}^*, \mu^*$ impliquent que : $\nu_{\mathcal{K}}^* = \frac{3}{2}\nu_{\mathcal{K}}^{*\,Brey}$ } $\zeta^* = \zeta^{*\,Brey}$
l'équation pour η^* implique que : $\nu_\eta^* = \nu_\eta^{*\,Brey}$
la comparaison des $\nu_{\mathcal{K}}^*$ implique que : $\nu_{\mathcal{K}}^* = \frac{3}{2}\nu_{\mathcal{K}}^{*\,Brey}$
la comparaison des ν_η^* implique que : $\nu_\eta^* = \nu_\eta^{*\,Brey}$
la comparaison des taux ζ^* implique que : $\zeta^* = \zeta^{*\,Brey}$

COHÉRENCE : OK.

- Cohérence de ma description et de celle de Poeschel : trouver les valeurs des $\nu_{\mathcal{K}}^*$ et ν_η^* dans mes équations.

Poeschel : $\alpha = 1$:

$$\eta^* = \frac{1}{\nu_\eta^* - \frac{1}{2}\zeta^*}$$

$$\mathcal{K}^* = \frac{1+c^*}{\nu_{\mathcal{K}}^* - \frac{2d}{d-1}\zeta^*} = \frac{d-1}{d}\frac{1+c^*}{\frac{d-1}{d}\nu_{\mathcal{K}}^* - 2\zeta^*} = \frac{1}{\left(\frac{d-1}{d}\nu_{\mathcal{K}}^*\right) - 2\left(\zeta^*\right)}\left[\frac{d-1}{d}(2a_2+1)\right]$$

($\frac{d-1}{d}\nu_{\mathcal{K}}^* \to \nu_{\mathcal{K}}^{*\,moi}$, $\zeta^* \to p\,\xi_T^{(0)*}$)

$$\mu^* = 2\zeta^*\frac{1}{\frac{2(d-1)}{d}\underbrace{\nu_{\mathcal{K}}^*}_{=\nu_\mu^*} - 3\zeta^*}\left[\mathcal{K}^* + \frac{d-1}{2d\zeta^*}c^*\right] = \frac{2}{2\left(\frac{d-1}{d}\nu_\mu^*\right) - 3\left(\zeta^*\right)}\left[\left(\zeta^*\right)\mathcal{K}^* + \frac{d-1}{2d}2a_2\right]$$

($\frac{d-1}{d}\nu_\mu^* \to \nu_\mu^{*\,moi}$, $\zeta^* \to p\,\xi_T^{(0)*}$)

Pour faire l'identification formelle avec mes Eqs., il faut que :

$$\zeta^* \longrightarrow p\,\xi_T^{(0)*}$$

$$\frac{d-1}{d}\nu_\mu^* \longrightarrow \nu_\mu^{*\,moi}$$

$$\frac{d-1}{d}\nu_{\mathcal{K}}^* \longrightarrow \nu_{\mathcal{K}}^{*\,moi}$$

Pour $d=3$, on retrouve la modification de notation avec Brey trouvée ci-dessus, donc Brey et moi avons les mêmes notations. Coefficients :

$$V_\eta^* = \frac{(3-3+2d)(1+1)}{4d}\left[1 - \frac{1}{64}c^*\right] = 1 - \frac{1}{64}2a_2$$

$$V_\kappa^* = V_\mu^* = \frac{1+1}{d-1}\left[\frac{d-1}{2} + \frac{3(d+8)(1-1)}{16} + \frac{4+5d-3(4-d)}{1024}2a_2\right]$$

$$= 1 + \frac{2}{d-1}\,\frac{4+5d-12+3d}{1024}\,2a_2$$

$$= 1 + \frac{2}{d-1}\,\frac{-8+8d}{1024}\,2a_2$$

$$= 1 + a_2\,\frac{32}{1024}\,\frac{d-1}{d-1}$$

$$= 1 + \frac{a_2}{32}$$

__Conclusion :__ il y a une différence de notation entre mes calculs et les calculs de Poeschel:

$$V_{\mu,\kappa}^{*\text{moi}} = \frac{d-1}{d} V_{\mu,\kappa}^{*\text{Poeschel}}$$

$$V_\eta^{*\text{moi}} = V_\eta^{*\text{Poeschel}}$$

avec :

$$V_\eta^{*\text{Poeschel}} = 1 - \frac{1}{64}2a_2$$

$$V_{\mu,\kappa}^{*\text{Poeschel}} = 1 + \frac{a_2}{32}\,\frac{d+1}{d-1}$$

Evidemment, il s'agit des coefficients issus de L_c, i.e. des sphères dures, i.e. V_η^{*c} et $V_{\kappa,\mu}^{*c}$, qui sont alors :

$$\boxed{V_\eta^{*c} = 1 - \frac{1}{64}2a_2 \qquad V_{\mu,\kappa}^{*c} = \frac{d-1}{d}\left[1 + \frac{a_2}{32}\right]}$$

$\boxed{d=3}$

$$V_2^* = \frac{2}{3} V_\mu^*$$

- Mais : équations définissant V_2^* pas les mêmes que celles définissant V_μ^*

PRL :

$$\kappa^* = \frac{2}{3} \frac{1}{V_\kappa^* - 2\zeta^*} (1 + c^*)$$

$$\mu^* = 2\zeta^* \left[\kappa^* + \frac{1}{3} \frac{c^*}{\zeta^*} \right] \frac{1}{2V_\mu^* - 3\zeta^*}$$

et GB :

$$\kappa^* = \frac{1}{V_2^* - \frac{2d}{d-1}\zeta^*} (1 + c^*) \overset{d=3}{=} \frac{1}{V_2^* - 2\frac{3}{2}\zeta^*} (1 + c^*)$$

$$\mu^* = 2\zeta^* \left[\kappa^* + \frac{(d-1)}{2d} \frac{c^*}{\zeta^*} \right] \frac{1}{\frac{2(d-1)}{d} V_2^* - 3\zeta^*} \overset{d=3}{=} 2\zeta^* \left[\kappa^* + \frac{1}{3}\frac{c^*}{\zeta^*} \right] \frac{1}{2\frac{2}{3}V_2^* - 3\zeta^*}$$

<u>Egalité? d=3 :</u>

$$\kappa^* : \quad \frac{2}{3} \frac{1}{V_\kappa^* - 2\zeta^*} = \frac{1}{V_2^* - 2\frac{3}{2}\zeta^*} \qquad (1)$$

$$\mu^* : \quad 2\zeta^* \left(\kappa^* + \frac{1}{3}\frac{c^*}{\zeta^*} \right) \frac{1}{2V_\mu^* - 3\zeta^*} = 2\zeta^* \left(\kappa^* + \frac{1}{3}\frac{c^*}{\zeta^*} \right) \frac{1}{2\frac{2}{3}V_2^* - 3\zeta^*} \qquad (2)$$

De (2) on en conclut que

$$\boxed{V_\mu^* = \frac{2}{3} V_2^*}$$

car ζ^* ont les mêmes expressions dans les deux articles. De (1) on en conclut que

$$\frac{3}{2} V_\kappa^* - 2\frac{3}{2}\zeta^* = V_2^* - 2\frac{3}{2}\zeta^*$$

$$\Longrightarrow \boxed{V_2^* = \frac{3}{2} V_\kappa^* = \frac{3}{2} V_\mu^*}$$

OK, cohérent.

Maintenant, des expressions finales de V_2^* et V_μ^* en d=3 on a :

$$V_\mu^* = \frac{1}{3}(1+\alpha)\left(1 + \frac{33}{16}(1-\alpha) + \frac{19-3\alpha}{1024} c^* \right)$$

$$V_2^* = \frac{1}{d-1}(1+\alpha)\left(\frac{d-1}{2} + \frac{3(d+8)(1-\alpha)}{16} + \frac{4+5d-3(4-d)\alpha}{1024} c^* \right)$$

$$\overset{d=3}{=} \frac{1}{2}(1+\alpha)\left(1 + \frac{33}{16}(1-\alpha) + \frac{19-3\alpha}{1024} c^* \right)$$

Ainsi : $\boxed{\frac{2}{3} V_2^* = V_\mu^*}$ $\Longrightarrow$ OK avec le reste !

Question pour moi : lequel de ces V_2^* ou V_μ^* choisir ?

↓ c'est

$\boxed{V_\mu^* = \frac{2}{3} V_2^*}$ en dimension 3 ! Ce facteur géométrique dépend de d, et est à établir par comparaison de Brey, de mes éqn. avec celles

$$\mathcal{K}^* = \frac{1}{V_{\mathcal{K}}^* - 2\not{p}\,\xi_\tau^{(c)*}}\left[\frac{1}{2}\not{p}\,\xi_1^{(c)*}\mathcal{M}^* + \frac{d-1}{d}(2a_2+1)\right]$$

($p = 1$; crossed-out term $\to 0$: analogie fourche)

$$\mathcal{M}^* = \frac{2}{2V_{\mathcal{M}}^* - 3\not{p}\,\xi_1^{(c)*} - 2p\,\xi_n^{(c)*}}\left[\not{p}\,\xi_1^{(c)*}\mathcal{K}^* + \frac{d-1}{2d}2a_2\right]$$

($p = 1$, $2p\,\xi_n^{(c)*} \to 0$)

$\Longrightarrow$ Mes éqns :

$$\mathcal{K}^* = \frac{1}{V_{\mathcal{K}}^* - 2\xi_1^{(c)*}}\left[\frac{d-1}{d}(\underbrace{2a_2}_{=c^*}+1)\right] = \frac{d-1}{d}\frac{1}{V_{\mathcal{K}}^* - 2\xi^*}(1+c^*)$$

$$\mathcal{M}^* = \frac{2}{2V_{\mathcal{M}}^* - 3\xi_1^{(c)*}}\left[\xi_1^{(c)*}\mathcal{K}^* + \frac{d-1}{2d}\underbrace{2a_2}_{=c^*}\right] = \frac{2\xi^*}{2V_{\mathcal{M}}^* - 3\xi^*}\left[\mathcal{K}^* + \frac{d-1}{2d}\frac{c^*}{\xi^*}\right]$$

Eqns de Bray :

$$\mathcal{K}^* = \frac{1}{V_2^* - \frac{2d}{d-1}\xi^*}(1+c^*)$$

$$\mathcal{M}^* = \frac{2\xi^*}{\frac{2(d-1)}{d}V_2^* - 3\xi^*}\left(\mathcal{K}^* + \frac{(d-1)}{2d}\frac{c^*}{\xi^*}\right)$$

Comparaison :

$\mathcal{K}^*$:

$$\frac{1}{\frac{d}{d-1}V_{\mathcal{K}}^* - \frac{2d}{d-1}\xi^*}(1+c^*) = \frac{1}{V_2^* - \frac{2d}{d-1}\xi^*}(1+c^*)$$

$$\Longrightarrow V_2^* = \frac{d}{d-1}V_{\mathcal{K}}^*$$

$$\Longrightarrow \boxed{V_{\mathcal{K}}^* = \frac{d-1}{d}V_2^*}$$

$\mathcal{M}^*$:

$$\frac{2\xi^*}{2V_{\mathcal{M}}^* - 3\xi^*}\left[\mathcal{K}^* + \frac{d-1}{2d}\frac{c^*}{\xi^*}\right] = \frac{2\xi^*}{\frac{2(d-1)}{d}V_2^* - 3\xi^*}\left[\mathcal{K}^* + \frac{d-1}{2d}\frac{c^*}{\xi^*}\right]$$

$$\Longrightarrow \boxed{V_{\mathcal{M}}^* = \frac{d-1}{d}V_2^*}$$

On a :

$$\Omega g = f^{(0)} \xi_n^{(1)}[f^{(0)}, g] - \frac{\partial f^{(0)}}{\partial V_i} V_T \xi_{ui}^{(1)}[f^{(0)}, g] + \frac{\partial f^{(0)}}{\partial T} T \xi_T^{(1)}[f^{(0)}, g]$$

$$\begin{cases} \xi_n^{(1)}[f^{(0)}, g] = \frac{2}{n}\omega[f^{(0)}, g] \\ \xi_{ui}^{(1)}[f^{(0)}, g] = \frac{1}{nV_T}\omega[f^{(0)}, V_i g] + \frac{1}{nV_T}\omega[V_i f^{(0)}, g] \\ \xi_T^{(1)}[f^{(0)}, g] = -\frac{2}{n}\omega[f^{(0)}, g] + \frac{m}{nkTd}\left(\omega[f^{(0)}, V^2 g] + \omega[V^2 f^{(0)}, g]\right) \end{cases}$$

On suppose que : $\Omega f^{(1)} \neq 0$, avec : $f^{(1)} = \mathcal{A}_i \nabla_i \ln T + \mathcal{B}_i \nabla_i \ln n + \mathcal{Z}_{ij} \nabla_i u_j$, ainsi :

$$\Omega f^{(1)} = (\Omega \mathcal{A}_i)\nabla_i \ln T + (\Omega \mathcal{B}_i)\nabla_i \ln n + (\Omega \mathcal{Z}_{ij})\nabla_i u_j \neq 0$$

⟹ on peut ainsi faire tous les calculs jusqu'aux Eqs. (38) qui ne sont modifiées que par :

$$V_\kappa^* = \frac{1}{V_0}\left[\frac{\int_{\mathbb{R}^d} dV\, S_i(V)\, J\mathcal{A}_i}{\int_{\mathbb{R}^d} dV\, S_i(V)\mathcal{A}_i} - p\frac{\int_{\mathbb{R}^d} dV\, S_i(V)\, \Omega\mathcal{A}_i}{\int_{\mathbb{R}^d} dV\, S_i(V)\mathcal{A}_i}\right]$$

$$V_\mu^* = \frac{1}{V_0}\left[\frac{\int_{\mathbb{R}^d} dV\, S_i(V)\, J\mathcal{B}_i}{\int_{\mathbb{R}^d} dV\, S_i(V)\mathcal{B}_i} - p\frac{\int_{\mathbb{R}^d} dV\, S_i(V)\, \Omega\mathcal{B}_i}{\int_{\mathbb{R}^d} dV\, S_i(V)\mathcal{B}_i}\right]$$

$$V_\eta^* = \frac{1}{V_0}\left[\frac{\int_{\mathbb{R}^d} dV\, D_{ij}(V)\, J\mathcal{Z}_{ij}}{\int_{\mathbb{R}^d} dV\, D_{ij}\mathcal{Z}_{ij}} - p\frac{\int_{\mathbb{R}^d} dV\, D_{ij}\, \Omega\mathcal{Z}_{ij}}{\int_{\mathbb{R}^d} dV\, D_{ij}\mathcal{Z}_{ij}}\right] \quad (\Omega\mathcal{Z}_{ij} \to = 0)$$

Approximation :

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{A}(V) &= a_1 \mathcal{M}(V) S(V) \\ \mathcal{B}(V) &= b_1 \mathcal{M}(V) S(V) \\ \mathcal{Z}(V) &= c_0 \mathcal{M}(V) D(V) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{permet de calculer } \Omega\mathcal{A}_i, \Omega\mathcal{B}_i, \Omega\mathcal{Z}_{ij}$$

(?) en fait, cela doit bien être le cas, le gros calcul le montre. On peut dire par arguments de couplage que $\Omega\mathcal{Z}_{ij} \sim \delta_{ij}$?

• $\Omega\mathcal{Z}_{ij}$: $g = \mathcal{Z}_{ij} = c_0 \mathcal{M}(V) D_{ij}(V)$; $D_{ij}(V) = \left(V_i V_j - \frac{V^2}{d}\delta_{ij}\right)$: pair. Ainsi $\xi_{ui}^{(1)}[f^{(0)}, \mathcal{Z}_{ij}] = 0$, et il reste à calculer $\omega[f^{(0)}, \mathcal{Z}_{ij}]$, $\omega[V^2 f^{(0)}, \mathcal{Z}_{ij}]$, $\omega[f^{(0)}, V^2\mathcal{Z}_{ij}]$. Symétries ⟹ si $i \neq j$, alors ces termes sont nuls
⟹ proportionnel à δ_{ij} :

$$\boxed{(\Omega\mathcal{Z}_{ij}) = f^{(0)}\frac{2}{n}\omega[f^{(0)}, \mathcal{Z}_{ij}] + \frac{\partial f^{(0)}}{\partial T} T\left[-\frac{2}{n}\omega[f^{(0)}, \mathcal{Z}_{ij}] + \frac{m}{nkTd}\left(\omega[f^{(0)}, V^2\mathcal{Z}_{ij}] + \omega[V^2 f^{(0)}, \mathcal{Z}_{ij}]\right)\right]} \quad (1)$$

(?) matrice diagonale $\sim \delta_{ij}$ + isotropie ⟹ $(\Omega\mathcal{Z}_{ij}) = a \cdot \delta_{ij}$.
Mais : $\mathrm{Tr}(\Omega\mathcal{Z}_{ij}) \underset{\text{op. lin.}}{=} \Omega\, \underbrace{\mathrm{Tr}\,\mathcal{Z}_{ij}}_{= d \cdot a} = \Omega \mathrm{Tr}\, c_0 \mathcal{M} D_{ij} = c_0 \Omega \mathcal{M} \underbrace{\mathrm{Tr}\, D_{ij}}_{=0} = 0 \implies a = 0 \implies \boxed{\Omega\mathcal{Z}_{ij} = 0}$ (2)

On peut le retrouver par calcul direct : **vérification !**

• $(\Omega\mathcal{A}_j)$; $(\Omega\mathcal{B}_j)$: $\mathcal{A}_j = a_1 \mathcal{M}(V) S_j(V)$; $\mathcal{B}_j = b_1 \mathcal{M}(V) S_j(V)$; $S_j(V) = \left(\frac{m}{2}V^2 - \frac{d+2}{2}k_B T\right) V_j$: impair.
Ainsi $\xi_n^{(1)} = \xi_T^{(1)} = 0$, et il reste à calculer $\omega[f^{(0)}, V_i \mathcal{A}_j/\mathcal{B}_j]$; $\omega[V_i f^{(0)}, \mathcal{A}_j/\mathcal{B}_j]$.

$$(\Omega S_j) = \frac{1}{nV_T}\left[\omega[f^{(0)}, V_i S_j] + \omega[V_i f^{(0)}, S_j]\right]$$

~~Symétries ⟹ proportionnel à~~ δ_{ij} :

Par de simples raisons de symétrie, on doit avoir ces choses.

$$\boxed{\left(\Omega \tfrac{\mathcal{A}_j}{\mathcal{B}_j}\right) \overset{(2)}{=} -\frac{\partial f^{(0)}}{\partial V_i} V_T \frac{1}{nV_T}\left[\omega[f^{(0)}, V_i \tfrac{\mathcal{A}_j}{\mathcal{B}_j}] + \omega[V_i f^{(0)}, \tfrac{\mathcal{A}_j}{\mathcal{B}_j}]\right]} \quad (3)$$

Conclusion :

Ω est un op. linéaire intégral agissant sur les vitesses

$$\Omega f^{(1)} = (\Omega\mathcal{A})\cdot\nabla\ln T + (\Omega\mathcal{B})\cdot\nabla\ln n \sim -\frac{\partial f^{(0)}}{\partial V_i} V_T \xi_{ui}^{(1)}$$

et aussi :

$$\Omega f^{(1)} = f^{(0)} \underbrace{\xi_n^{(1)}}_{=0 \text{ gros calcul}} - \frac{\partial f^{(0)}}{\partial V_i} V_T \xi_{ui}^{(1)} + \frac{\partial f^{(0)}}{\partial T} T \underbrace{\xi_T^{(1)}}_{=0 \text{ gros calcul}} = -\frac{\partial f^{(0)}}{\partial V_i} V_T \xi_{ui}^{(1)}$$

⊖ plus de contradiction !
↑ vérif explicite de $\xi_{ui}^{(1)}$

↑ si $\xi_n^{(1)}$ et $\xi_T^{(1)}$ sont nuls, alors on a obligatoirement $\Omega f^{(1)} \sim \partial f^{(0)}/\partial V_i\, V_T \xi_{ui}^{(1)}$

• et on peut faire le calcul explicite de (3) par **vérification** du très gros calcul donnant $\xi_{ui}^{(1)}$.

• si on ne désire rien vérifier, il suffit de calculer $\Omega\mathcal{A}_i$ et $\Omega\mathcal{B}_i$ pour en terminer

Calculs restant à faire :

(287) $\Rightarrow$

$$\nu_\zeta^* = \frac{\beta^2}{(d+2)(d-1)\nu_0}\Big[\overbrace{\int_{\mathbb{R}^d} dv\, D_{ij}(V)\, J[\mathcal{M}D_{ij}]}^{\text{déjà calculé}} - p\overbrace{\int_{\mathbb{R}^d} dv\, D_{ij}(V)\, \Omega[\underbrace{\mathcal{M}D_{ij}}_{=\mathcal{Z}_{ij}/c_0}]}^{=0 \text{ car on a vu que } \Omega\mathcal{Z}_{ij}=0}\Big] \tag{1}$$

$$\nu_\kappa^* = \nu_\mu^* = \frac{2m\beta^3}{d(d+2)n\nu_0}\Big[\underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} dv\, S_i(V)\, J[\mathcal{M}S_i]}_{\text{déjà calculé}} - p\underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} dv\, S_i(V)\, \Omega[\underbrace{\mathcal{M}S_i}_{=\mathcal{B}_i/b_1 = \mathcal{A}_i/a_1}]}_{:=I}\Big] \tag{2}$$

Il reste donc à calculer :

$$I := -p\frac{2m\beta^3}{d(d+2)n\nu_0}\int_{\mathbb{R}^d} dv\, S_i(V)\,\Omega[\mathcal{M}S_i], \tag{3}$$

avec :

$$\Omega[\mathcal{M}S_i] \overset{(3)\,\text{p.}\,[illegible]}{=} -\frac{\partial f^{(0)}}{\partial V_j}\, v_T \underbrace{\frac{1}{n v_T}\Big\{\omega[f^{(0)}, V_j\mathcal{M}S_i] + \omega[V_j f^{(0)}, \mathcal{M}S_i]\Big\}}_{\text{ceci est une constante par rapport à } V\text{, car avec } \omega \text{ on intègre, notée } := K_{ij}} \tag{4}$$

Ainsi :

$$I = +p\frac{2m\beta^3}{d(d+2)n\nu_0} K_{ij}\underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} dV\, S_i(V)\frac{\partial f^{(0)}}{\partial V_j}}$$

$$= -\int_{\mathbb{R}^d} dV\, f^{(0)}\frac{\partial S_i}{\partial V_j} + \underbrace{f^{(0)}(V)\, S_i(V)\Big|_{\partial\Omega}}_{\to 0}$$

$$= -p\frac{2m\beta^3}{d(d+2)n\nu_0} K_{ij}\int_{\mathbb{R}^d} dV\, f^{(0)}(V)\frac{\partial S_i(V)}{\partial V_j} \tag{5}$$

Le calcul de K_{ij} est lourd, mais similaire à ce qui a déjà été fait : on peut réutiliser certains résultats.
Pour le calcul de l'autre intégrale, facile, on a :

$$f^{(0)}(V) \overset{(244)}{=} \frac{n}{v_T^d}\frac{1}{\pi^{d/2}} e^{-V^2/v_T^2}\Big[1 + a_2\Big(\frac{1}{2}\frac{V^4}{v_T^4} - \frac{d+2}{2}\frac{V^2}{v_T^2} + \frac{d(d+2)}{8}\Big)\Big] \quad ; \; v_T = \sqrt{\frac{2}{\beta m}} = \sqrt{\frac{2kT}{m}} \tag{6}$$

$$\frac{\partial S_i(V)}{\partial V_j} = \frac{\partial}{\partial V_j}\Big[\Big(\frac{m}{2}V^2 - \frac{d+2}{2}\overbrace{k_B T}^{=\frac{m}{2}v_T^2}\Big)V_i\Big]$$

$$= \frac{m}{2}\Big[\Big(V^2 - \frac{d+2}{2}v_T^2\Big)\frac{\partial V_i}{\partial V_j} + \Big(\underbrace{\frac{\partial}{\partial V_j}V_kV_k}_{=2\delta_{jk}V_k = 2V_j}\Big)V_i\Big]$$

$$= \frac{m}{2}\Big[2V_iV_j + \Big(V^2 - \frac{d+2}{2}v_T^2\Big)\delta_{ij}\Big] \tag{7}$$

(6) et (7) dans (5) $\Rightarrow$

$$I = -p\frac{\cancel{2}m^2\beta^3}{d(d+2)\cancel{n}\nu_0} K_{ij}\frac{\cancel{n}}{v_T^d}\frac{1}{\pi^{d/2}}\frac{\cancel{m}}{\cancel{2}}\int_{\mathbb{R}^d} dV\, e^{-\frac{V^2}{v_T^2}}\Big[1 + a_2\Big(\frac{1}{2}\frac{V^4}{v_T^4} - \frac{d+2}{2}\frac{V^2}{v_T^2} + \frac{d(d+2)}{8}\Big)\Big] \times$$

$$\times\Big[2V_iV_j + \Big(V^2 - \frac{d+2}{2}v_T^2\Big)\delta_{ij}\Big]$$

$$\overset{c=V/v_T}{=} -p K_{ij}\frac{m^2\beta^3}{d(d+2)\nu_0\pi^{d/2}}\frac{1}{v_T^d}v_T^d\int_{\mathbb{R}^d} dc\, e^{-c^2}\Big[1 + a_2\Big(\frac{1}{2}c^4 - \frac{d+2}{2}c^2 + \frac{d(d+2)}{8}\Big)\Big]\Big[2c_ic_j + \Big(c^2 - \frac{d+2}{2}\Big)\delta_{ij}\Big]\underbrace{v_T^2}_{=2/\beta m}$$

$$= -p K_{ij}\frac{2m\beta^2}{d(d+2)\nu_0\pi^{d/2}}\int_{\mathbb{R}^d} dc\, e^{-c^2}\Big[1 + a_2\Big(\frac{1}{2}c^4 - \frac{d+2}{2}c^2 + \frac{d(d+2)}{8}\Big)\Big]\Big[2c_ic_j + \Big(c^2 - \frac{d+2}{2}\Big)\delta_{ij}\Big] \tag{8}$$

$$= -p K_{ij} \frac{2m\beta^2}{d(d+2)V_0 \pi^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} dc\, e^{-c^2} \Big[2c_i c_j + c^2\delta_{ij} - \frac{d+2}{2}\delta_{ij} + a_2 c^4 c_i c_j + a_2 \frac{1}{2} c^6 \delta_{ij} - a_2 c^4 \frac{d+2}{4}\delta_{ij}$$
$$- a_2 \frac{d+2}{2} 2c^2 c_i c_j - a_2 \frac{d+2}{2} c^4 \delta_{ij} + a_2 \left(\frac{d+2}{2}\right)^2 c^2 \delta_{ij}$$
$$+ a_2 \frac{d(d+2)}{8} 2 c_i c_j + a_2 \frac{d(d+2)}{8} c^2 \delta_{ij} - a_2 \frac{d(d+2)}{8}\frac{d+2}{2}\delta_{ij} \Big]$$

$$= -p K_{ij} \frac{2m\beta^2}{d(d+2)V_0 \pi^{d/2}} \Big[2 M^{(1)}_{ij}[0] + \delta_{ij} I^{(1)}[2] - \frac{d+2}{2}\delta_{ij} I^{(1)}[0] + a_2 M^{(1)}_{ij}[4] + \frac{1}{2} a_2 I^{(1)}[6]\delta_{ij} - \frac{d+2}{4} a_2 \delta_{ij} I^{(1)}[4]$$
$$- (d+2) a_2 M^{(1)}_{ij}[2] - \frac{d+2}{2} a_2 \delta_{ij} I^{(1)}[4] + \left(\frac{d+2}{2}\right)^2 a_2 \delta_{ij} I^{(1)}[2]$$
$$+ \frac{d(d+2)}{4} a_2 M^{(1)}_{ij}[0] + \frac{d(d+2)}{8}\delta_{ij} a_2 I^{(1)}[2] - \frac{d(d+2)^2}{16} a_2 \delta_{ij} I^{(1)}[0] \Big]$$

$$= -p K_{ij} \frac{2m\beta^2}{d(d+2)V_0 \pi^{d/2}} \Big[M^{(1)}_{ij}[0]\left(2 + \frac{d(d+2)}{4}a_2\right) + I^{(1)}[2]\,\delta_{ij}\left(1 + \frac{d(d+2)}{8}a_2 + \frac{(d+2)^2}{4}a_2\right)$$
$$- I^{(1)}[0]\,\delta_{ij}\frac{d+2}{2}\left(1 + \frac{d(d+2)}{8}a_2\right) + a_2 M^{(1)}_{ij}[4] + \frac{1}{2}a_2 I^{(1)}[6]\,\delta_{ij}$$
$$- I^{(1)}[4]\,\delta_{ij}\, a_2 \frac{d+2}{4} 3 - M^{(1)}_{ij}[2]\, a_2 (d+2) \Big] \qquad (9)$$

où :

$$I^{(a)}[n] = \int_{\mathbb{R}^d} dx\, |x|^n e^{-ax^2} = \frac{\pi^{d/2}}{a^{\frac{d+n}{2}}} \frac{\Gamma\left(\frac{d+n}{2}\right)}{\Gamma(d/2)}$$

$$M^{(a)}_{ij}[n] = \int_{\mathbb{R}^d} dx\, |x|^n e^{-ax^2} x_i x_j = \delta_{ij}\, \pi^{\frac{d-1}{2}} 2^{d-3} \frac{d+n}{d} \frac{\Gamma\left(\frac{d+n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right)}{\Gamma(d-1)} \frac{1}{a^{\frac{d+n+2}{2}}}$$

En particulier :

$$\left.\begin{aligned}
I^{(1)}[0] &= \pi^{d/2} \\
I^{(1)}[2] &= \pi^{d/2}\frac{d}{2} \\
I^{(1)}[4] &= \pi^{d/2}\frac{d+2}{2}\frac{d}{2} \\
I^{(1)}[6] &= \pi^{d/2}\frac{d+4}{2}\frac{d+2}{2}\frac{d}{2} \\
M^{(1)}_{ij}[0] &= \delta_{ij}\,\pi^{\frac{d-1}{2}} 2^{d-3}\frac{\Gamma(d/2)\Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right)}{\Gamma(d-1)} = \delta_{ij}\frac{\pi^{d/2}}{2} \\
M^{(1)}_{ij}[2] &= \delta_{ij}\frac{d+2}{4}\pi^{d/2} \\
M^{(1)}_{ij}[4] &= \delta_{ij}\frac{(d+2)(d+4)}{8}\pi^{d/2}
\end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Les relations (10) dans (9) donnent :

$$I = -p K_{ij} \frac{2m\beta^2}{d(d+2)V_0 \pi^{d/2}} \pi^{d/2} \delta_{ij} \Big[\frac{1}{2}\left(2 + a_2\frac{d(d+2)}{4}\right) + \frac{d}{2}\left(1 + a_2\frac{d(d+2)}{8} + \frac{(d+2)^2}{4}a_2\right) - \frac{d+2}{2}\left(1 + \frac{d(d+2)}{8}a_2\right)$$
$$+ a_2\frac{(d+2)(d+4)}{8} + a_2 \frac{1}{2}\frac{d}{2}\frac{d+2}{2}\frac{d+4}{2} - \frac{3(d+2)}{4} a_2 \frac{d}{2}\frac{d+2}{2}$$
$$- a_2 (d+2)\frac{d+2}{4} \Big]$$

$$= \left(1 + a_2\frac{d(d+2)}{8}\right)\frac{2}{2}$$

$$= -p K_{ij} \frac{2m\beta^2}{d(d+2)V_0} \delta_{ij}\, a_2 \left[-\frac{1}{8} d(d+2)^2 + \frac{d(d+2)^2}{8} \right]$$

$$= +p \frac{d+2}{4} \frac{m\beta^2}{V_0} a_2 \underbrace{\delta_{ij} K_{ij}}_{= \mathrm{Tr}\, K} = 0$$

$$= p\, a_2 \frac{d+2}{4} \frac{m\beta^2}{V_0} \mathrm{Tr}\, K \qquad (11)$$

Il reste donc à calculer $\mathrm{Tr}\,K$, ce qui est à présent sensiblement plus facile. En effet :

$$K_{ii} \overset{(a)}{=} V_T \frac{1}{nV_T}\left\{ \omega\left[f^{(0)}, V_i \mathcal{M} S_i\right] + \omega\left[V_i f^{(0)}, \mathcal{M} S_i\right]\right\}$$

$$\mathrm{Tr}\,K = \frac{1}{n}\,\omega\Big[f^{(0)}, \mathcal{M} \underbrace{\sum_{i=1}^{d} V_i S_i}\Big] + \frac{1}{n}\,\underbrace{\omega\Big[\sum_{i=1}^{d} V_i f^{(0)}, \mathcal{M} S_i\Big]}$$

$$= \left(\frac{m}{2}V^2 - \frac{d+2}{2}k_B T\right)\underbrace{\sum_{i=1}^{d} V_i^2}_{=V^2} \qquad \underset{\text{isotropie}}{=} d\cdot\omega\left[V_j f^{(0)}, \mathcal{M} S_j\right],\ j\in\{1,\dots,d\}$$

$$= \frac{1}{n}\,\omega\left[f^{(0)}, \mathcal{M}\, V^2\left(\frac{m}{2}V^2 - \frac{d+2}{2}\,\frac{m}{2}V_T^2\right)\right] + \frac{d}{n}\,\omega\left[V_j f^{(0)}, \mathcal{M} S_j\right]$$

où :

$$\omega[f,g] = \sigma^{d-1}\beta_1 \int_{\mathbb{R}^{2d}} dv_1\, dv_2\, |v_{12}|\; g(r_1, v_1; t)\, f(r_2, v_2; t)$$

Gros calcul restant :

$$\omega[V_j f^{(0)}, \mathcal{M} S_j] = \sigma^{d-1}\beta_1 \int_{\mathbb{R}^{2d}} dv_1 dv_2 \, |v_{12}| \, \mathcal{M}(V_1) S_j(V_1) \, V_{2j} f^{(0)}(V_2)$$

pas de sommation ici !

$$= \sigma^{d-1}\beta_1 \int_{\mathbb{R}^{2d}} dv_1 dv_2 \, |v_{12}| \, \frac{n}{V_T^d \pi^{d/2}} e^{-V_1^2/V_T^2} \left(\frac{m}{2}V_1^2 - \frac{d+2}{2}\frac{m}{2}V_T^2\right) V_{1j} V_{2j} \frac{n}{V_T^d \pi^{d/2}} e^{-V_2^2/V_T^2} \left(1 + a_2 S_2(V_2^2)\right)$$

$$= \sigma^{d-1}\beta_1 \frac{n^2}{V_T^{2d}\pi^d}\frac{m}{2} \int_{\mathbb{R}^{2d}} dv_1 dv_2 \, |v_{12}| \, e^{-V_1^2/V_T^2} \left(V_1^2 - \frac{d+2}{2}V_T^2\right) e^{-V_2^2/V_T^2} V_{1j} V_{2j} \left(1 + a_2 S_2(V_2^2)\right)$$

$$= \sigma^{d-1}\beta_1 \frac{n^2}{V_T^{2d}\pi^d}\frac{m}{2} V_T^{2d} \int_{\mathbb{R}^{2d}} dc_1 dc_2 \, V_T c_{12} \, e^{-c_1^2} e^{-c_2^2} V_T^2 \left(c_1^2 - \frac{d+2}{2}\right) V_T^2 c_{1j} c_{2j} \left(1 + a_2 S_2(V_2^2/V_T^2)\right)$$

$$= \sigma^{d-1}\beta_1 \frac{m}{2}\frac{n^2}{\pi^d} V_T^5 \int_{\mathbb{R}^{2d}} dc_1 dc_2 \; c_{12} e^{-c_1^2 - c_2^2} \left(c_1^2 - \frac{d+2}{2}\right) c_{1j} c_{2j} \left(1 + a_2 S_2(c_2^2)\right)$$

$$= \sigma^{d-1}\beta_1 \frac{m}{2}\frac{n^2}{\pi^d} V_T^5 \int_{\mathbb{R}^{2d}} dc_{12} dc \; c_{12} \, e^{-c_{12}^2/2} e^{-2c^2} \underbrace{\left[c^2 + \frac{1}{4}c_{12}^2 + (c \cdot c_{12}) - \frac{d+2}{2}\right]\left[1 + a_2 S_2(c_2^2)\right]\left(c_j + \frac{1}{2}c_{12j}\right)}_{= K_1 \text{ déjà calculé (493)}}$$

$$= \sigma^{d-1}\beta_1 \frac{m}{2}\frac{n^2}{\pi^d} V_T^5 \int_{\mathbb{R}^d} dc_{12} \, |c_{12}| \, e^{-c_{12}^2/2} \int_{\mathbb{R}^d} dc \, e^{-2c^2} \; c_{2j} \cdot 1 \; K_1$$

Calcul avec :

$$A(V_T c_2) = c_{2j} = c_j - \frac{1}{2}c_{12j}$$
$$B(V_T c_1) = 1$$

A nouveau, beaucoup de termes sont nuls pour raisons de symétrie. On regarde les termes pour lesquels les intégrales seront nonnulles : les termes restants sont ceux de $K_1^{c_q}$ et $K_1^{c_{12q}}$ déjà calculés. Ainsi :

$$\omega[V_j f^{(0)}, \mathcal{M} S_j] = \sigma^{d-1}\beta_1 \frac{m}{2}\frac{n^2}{\pi^d} V_T^5 \int_{\mathbb{R}^d} dc_{12} \, |c_{12}| \, e^{-c_{12}^2/2} \int_{\mathbb{R}^d} dc \, e^{-2c^2} \left[c_j K_1^{c_j} - \frac{1}{2} c_{12j} K_1^{c_{12j}}\right]$$

$$= \sigma^{d-1}\beta_1 \frac{m}{2}\frac{n^2}{\pi^d} V_T^4 \underbrace{V_T \int_{\mathbb{R}^d} dc_{12} \, |c_{12}| \, e^{-c_{12}^2/2} \int_{\mathbb{R}^d} dc \, e^{-2c^2} \left[c_j K_1^{c_j} - \frac{1}{2} c_{12j} K_1^{c_{12j}}\right]}_{= I_1 \text{ de } (A,B) = (V_2, 1) \text{ : déjà calculé : Eq. (26) + Mathematica}}$$

$$= \sigma^{d-1}\beta_1 \frac{m}{2}\frac{n^2}{\pi^d} V_T^4 V_T \left(\frac{\pi^d \Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)}{8\sqrt{2}\, d\, \Gamma(d/2)} + a_2 \frac{23 - 24d - 76d^2 - 4d^3 + 12d^4}{256\sqrt{2}\, d\, \Gamma(d/2)} \pi^d \Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)\right)$$

$$= \sigma^{d-1}\beta_1 \frac{m}{2}\frac{n^2}{\pi^d} V_T^4 V_T \frac{\pi^d \Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)}{8\sqrt{2}\, d\, \Gamma(d/2)} \left(1 + a_2 \frac{23 - 24d - 76d^2 - 4d^3 + 12d^4}{32}\right)$$

$\Longrightarrow$

$$\boxed{\frac{d}{n}\omega[V_j f^{(0)}, \mathcal{M} S_j] = \sigma^{d-1}\beta_1 \frac{m}{2}\frac{n}{\pi^d} V_T^5 \frac{\pi^d \Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)}{8\sqrt{2}\, \Gamma(d/2)} \left(1 + a_2 \frac{23 - 24d - 76d^2 - 4d^3 + 12d^4}{32}\right)} \qquad (12)$$

Second gros calcul restant : (5)

$$w[f^{(0)}, \mathcal{M} V_i S_i] = \sigma^{d-1}\beta_1 \int_{\mathbb{R}^{2d}} dV_1 dV_2 |V_{12}| \frac{n}{V_T^d \pi^{d/2}} e^{-\frac{V_1^2}{V_T^2}} e^{-\frac{V_2^2}{V_T^2}} \frac{n}{V_T^d \pi^{d/2}} \left(1 + a_2 S_2(c_2^2)\right)\left(\frac{m}{2}V_1^2 - \frac{d+2}{2}\frac{m}{2}V_T^2\right) V_{1i} V_{1i}$$

$$= \sigma^{d-1}\beta_1 \frac{n^2}{V_T^{2d}} \frac{m V_T^{2d}}{2\pi^d} \int_{\mathbb{R}^{2d}} dc_1 dc_2 V_T |c_{12}| e^{-c_1^2 - c_2^2}\left(1 + a_2 S_2(c_2^2)\right)\left(c_1^2 - \frac{d+2}{2}\right) V_T^2 V_T^2 c_{1i} c_{1i}$$

$$= \sigma^{d-1}\beta_1 \frac{n^2}{\cancel{V_T^{2d}}} \frac{m}{2} \cancel{V_T^{2d}} \frac{V_T^5}{\pi^d} \int_{\mathbb{R}^{2d}} dc_1 dc_2 |c_{12}| e^{-c_1^2 - c_2^2}\left(1 + a_2 S_2(c_2^2)\right)\left(c_1^2 - \frac{d+2}{2}\right) c_{1i} c_{1i}$$

$$= \sigma^{d-1}\beta_1 \frac{m}{2}\frac{n^2}{\pi^d} V_T^5 \int_{\mathbb{R}^d} dc_{12} |c_{12}| e^{-c_{12}^2/2} \int_{\mathbb{R}^d} dc\, e^{-2c^2} c_{1i}\left[c^2 + \frac{1}{4}c_{12}^2 + (c\cdot c_{12}) - \frac{d+2}{2}\right]\left[1 + a_2 S_2(c_2^2)\right] \times (c_i + \frac{1}{2} c_{12i})$$

$\underbrace{\qquad\qquad}_{= K_1 \text{ déjà calculé}}$

$$= \sigma^{d-1}\beta_1 \frac{m}{2}\frac{n^2}{\pi^d} V_T^4 V_T \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} dc_{12} |c_{12}| e^{-c_{12}^2/2} \int_{\mathbb{R}^d} dc\, e^{-2c^2}\left[c_i K_1^{c_i} + \frac{1}{2} c_{12i} K_1^{c_{12i}}\right]}_{= I_1 \text{ de } (A,B) = (1, V_1) \text{ : déjà calculé Eq. (28) + Mathematica}}$$

$$= \sigma^{d-1}\beta_1 \frac{m}{2}\frac{n^2}{\pi^d} V_T^4 V_T \left(\frac{(3+2d)\pi^d \Gamma(\frac{d+1}{2})}{d\, 8\sqrt{2}\, \Gamma(d/2)} + a_2 \frac{-195 - 178d + 140d^2 + 180d^3 + 44d^4}{d\, 256\sqrt{2}\, \Gamma(d/2)} \pi^d \Gamma(\tfrac{d+1}{2})\right)$$

$$= \sigma^{d-1}\beta_1 \frac{m}{2}\frac{n^2}{\pi^d} V_T^5 \frac{\pi^d \Gamma(\frac{d+1}{2})}{d\, 8\sqrt{2}\,\Gamma(d/2)}\left(3 + 2d + a_2 \frac{-195 - 178d + 140d^2 + 180d^3 + 44d^4}{32}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{n}\mathcal{T}\; w[f^{(0)}, \mathcal{M} V_i S_i] = \sigma^{d-1}\beta_1 \frac{m}{2}\frac{n}{\pi^d} V_T^5 \frac{\pi^d \Gamma(\frac{d+1}{2})}{\cancel{d}\, 8\sqrt{2}\,\Gamma(d/2)}\left(3 + 2d + a_2 \frac{-195 - 178d + 140d^2 + 180d^3 + 44d^4}{32}\right)} \quad (13)$$

ici on a multiplié par d : OK.

(12) et (13) ⇒

$$\mathrm{Tr} K = \sigma^{d-1}\beta_1 \frac{m}{2}\frac{n}{\pi^d} V_T^5 \frac{\pi^d \Gamma(\frac{d+1}{2})}{8\sqrt{2}\,\Gamma(d/2)}\left[4 + 2d + a_2 \cdot 2 \cdot \frac{-86 - 101d + 32d^2 + 88d^3 + 28d^4}{32}\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathrm{Tr} K = \sigma^{d-1}\beta_1 \frac{m}{2}\frac{n}{\pi^d} V_T^5 \frac{\pi^d \Gamma(\frac{d+1}{2})}{4\sqrt{2}\,\Gamma(d/2)}\left[2 + d + a_2 \frac{-86 - 101d + 32d^2 + 88d^3 + 28d^4}{32}\right]} \quad (14)$$

(11) et (14) ⇒

$$I = p\, a_2 \frac{(d+2)^2}{4d}\frac{m\beta^2}{\nu_0}\, \sigma^{d-1}\beta_1 \frac{m}{2}\frac{n}{\pi^d} V_T^5 \frac{\pi^d \Gamma(\frac{d+1}{2})}{4\sqrt{2}\,\Gamma(d/2)}\left(d + 2 + O(a_2)\right)$$

$$= p\, a_2 \frac{\cancel{d+2}\,(d+2)}{4d} m^2\beta^2 \frac{4_0}{p^{(0)}}\, \sigma^{d-1} \frac{\pi^{\frac{d-1}{2}}}{\cancel{\Gamma(\frac{d+1}{2})}} \frac{1}{2} n \left(\frac{2}{\beta m}\right)^{5/2} \frac{\pi^d \cancel{\Gamma(\frac{d+1}{2})}}{4\sqrt{2}\,\Gamma(d/2)} \cancel{(d+2)} \frac{1}{\pi^d} + O(a_2^2)$$

($p^{(0)} = n/\beta$)

$$= p\, a_2 \frac{\cancel{m^2\beta^2}}{\cancel{4}} \cancel{\beta} \frac{(d+2)^2}{8d} \frac{\cancel{\Gamma(d/2)}}{\cancel{\pi^{(d+1)/2}}} \frac{\cancel{\sqrt{m}}}{\cancel{\sqrt{\beta}}} \frac{1}{\cancel{\sigma^{d-1}}} \cancel{\pi^{(d-1)/2}} \frac{\cancel{n}}{2} \sqrt{\cancel{\frac{2}{\beta m}}} \cancel{\frac{4}{\beta^2 m^2}} \frac{\cancel{\pi^d}}{\cancel{4\sqrt{2}\,\Gamma(d/2)}} \cancel{\frac{1}{\pi^d}} \cancel{\sigma^{d-1}}$$

$$= p\, a_2 \frac{(d+2)^2}{8d}\frac{1}{2}$$

$$\boxed{I = p\, a_2 \frac{(d+2)^2}{16d}} \quad (15)$$

Conclusion :

$$V_{\zeta}^{+} = \text{Eq. (44b) article}$$

$$V_{k}^{*} = V_{\mu}^{*} = \text{Eq. (44a) article} + p\, a_2 \frac{d+2}{16}$$

$= 0$

Rappel : problème concernant $\Omega Z_{ij} = 0$ · Preuve.

⚠ on montre qu'il existe une telle solution, mais pas qu'elle est unique... (1)

D'un côté, on fait le calcul de $\Omega f^{(1)}$ selon sa définition :

$$\Omega f^{(1)} = f^{(0)} \xi_n^{(1)} - \frac{\partial f^{(0)}}{\partial V_i} V_T \xi_{ui}^{(1)} + \frac{\partial f^{(0)}}{\partial T} T \xi_T^{(1)} \quad (1)$$

et on trouve $\xi_n^{(1)} = \xi_T^{(1)} = 0$. Ainsi avec ce calcul direct et gros :

$$\Omega f^{(1)} = -\frac{\partial f^{(0)}}{\partial V_i} V_T \xi_{ui}^{(1)} \quad (2)$$

→ ceci est donc un résultat général qui s'est obtenu sans faire la moindre hyp. sur ΩZ_{ij}

D'un autre côté, Ω étant un opérateur linéaire intégral sur les vitesses V, on a par définition de $f^{(1)}$:

$$\Omega f^{(1)} = (\Omega \mathcal{A}) \cdot \nabla \ln T + (\Omega \mathcal{B}) \cdot \nabla \ln n + (\Omega Z_{ij}) \nabla_i u_j \quad (3)$$

Et on peut développer chaque terme de (3). Comme

$$\mathcal{A}_j = a_1 \mathcal{M}(V) S_j(V) \qquad Z_{ij} = c_0 \mathcal{M}(V) D_{ij}(V)$$

$$\mathcal{B}_j = b_1 \mathcal{M}(V) S_j(V) \qquad D_{ij}(V) = \left(V_i V_j - \frac{V^2}{d} \delta_{ij}\right)$$

$$S_j(V) = \left(\frac{m}{2} V^2 - \frac{d+2}{2} k_B T\right) V_j$$

i.e. $S_j(V)$ est une fonction impaire de la vitesse et $D_{ij}(V)$ est une fonction paire de la vitesse, alors on obtient :

$$\Omega \mathcal{A}_j = f^{(0)} \xi_n^{(1)}[f^{(0)}, \mathcal{A}_j] - \frac{\partial f^{(0)}}{\partial V_i} V_T \xi_{ui}^{(1)}[f^{(0)}, \mathcal{A}_j] + \frac{\partial f^{(0)}}{\partial T} T \xi_T^{(1)}[f^{(0)}, \mathcal{A}_j]$$

$$= f^{(0)} \frac{2}{n} \omega[\underset{pair}{f^{(0)}}, \underset{impair}{\mathcal{A}_j}]^{\to 0} - \frac{\partial f^{(0)}}{\partial V_i} V_T \frac{1}{n V_T}\left(\omega[\underset{pair}{f^{(0)}}, \underset{impair}{V_i \mathcal{A}_j}] + \omega[\underset{impair}{V_i f^{(0)}}, \underset{impair}{\mathcal{A}_j}]\right)$$

$$+ \frac{\partial f^{(0)}}{\partial T} T \left(-\frac{2}{n} \omega[\underset{pair}{f^{(0)}}, \underset{impair}{\mathcal{A}_j}]^{\to 0} + \frac{m}{n k T d}\left\{\omega[\underset{pair}{f^{(0)}}, \underset{impair}{V^2 \mathcal{A}_j}]^{\to 0} + \omega[\underset{pair}{V^2 f^{(0)}}, \underset{impair}{\mathcal{A}_j}]\right\}\right)$$

$$= -\frac{\partial f^{(0)}}{\partial V_i} V_T \frac{1}{n V_T}\left(\omega[f^{(0)}, V_i \mathcal{A}_j] + \omega[V_i f^{(0)}, \mathcal{A}_j]\right)$$

$$\Omega \mathcal{B}_i = -\frac{\partial f^{(0)}}{\partial V_j} V_T \frac{1}{n V_T}\left(\omega[f^{(0)}, V_i \mathcal{B}_j] + \omega[V_i f^{(0)}, \mathcal{B}_j]\right)$$

$$\Omega Z_{ij} = f^{(0)} \frac{2}{n} \omega[\underset{pair}{f^{(0)}}, \underset{pair}{Z_{ij}}] - \frac{\partial f^{(0)}}{\partial V_K} V_T \frac{1}{n V_T}\left(\omega[\underset{pair}{f^{(0)}}, \underset{impair}{V_K Z_{ij}}]^{\to 0} + \omega[\underset{impair}{V_K f^{(0)}}, \underset{pair}{Z_{ij}}]^{\to 0}\right)$$

$$+ \frac{\partial f^{(0)}}{\partial T} T \left(-\frac{2}{n} \omega[\underset{pair}{f^{(0)}}, \underset{pair}{Z_{ij}}] + \frac{m}{n k T d}\left\{\omega[\underset{pair}{f^{(0)}}, \underset{pair}{V^2 Z_{ij}}] + \omega[V^2 f^{(0)}, Z_{ij}]\right\}\right)$$

$$= f^{(0)} \frac{2}{n} \omega[f^{(0)}, Z_{ij}] + \frac{\partial f^{(0)}}{\partial T} T \left(-\frac{2}{n} \omega[f^{(0)}, Z_{ij}] + \frac{m}{n k T d}\left\{\omega[f^{(0)}, V^2 Z_{ij}] + \omega[V^2 f^{(0)}, Z_{ij}]\right\}\right)$$

$$+ f^{(0)} \frac{2}{n} \omega[f^{(0)}, Z_{ij}]$$

Ce qui donne dans (3) : $(\Omega \mathcal{A}_i) \nabla_i \ln T + (\Omega \mathcal{B}_i) \nabla_i \ln n + (\Omega Z_{ij}) \nabla_i u_j =$

$$\Omega f^{(1)} \neq -\frac{\partial f^{(0)}}{\partial V_i} V_T \frac{1}{n V_T}\left(\omega[f^{(0)}, V_i(\mathcal{A}_j \nabla_j \ln T + \mathcal{B}_j \nabla_j \ln n)] + \omega[V_i f^{(0)}, (\mathcal{A}_j \nabla_j \ln T + \mathcal{B}_j \nabla_j \ln n)]\right)$$

$$+ \frac{\partial f^{(0)}}{\partial T} T \left(-\frac{2}{n} \omega[f^{(0)}, Z_{ij} \nabla_i u_j] + \frac{m}{n k T d}\left\{\omega[f^{(0)}, V^2 Z_{ij} \nabla_i u_j] + \omega[V^2 f^{(0)}, Z_{ij} \nabla_i u_j]\right\}\right)$$

$$+ \underbrace{-\frac{\partial f^{(0)}}{\partial V_i} V_T \frac{1}{n V_T}\left(\omega[f^{(0)}, V_i Z_{ij} \nabla_i u_j] + \omega[V_i f^{(0)}, Z_{ij} \nabla_i u_j]\right)}_{\text{ce dernier terme est bien nul, mais on l'ajoute pour la suite}}$$

$$= -\frac{\partial f^{(0)}}{\partial V_K} V_T \frac{1}{n V_T}\left(\omega[f^{(0)}, V_K \underbrace{(\mathcal{A}_j \nabla_j \ln T + \mathcal{B}_j \nabla_j \ln n + Z_{ij} \nabla_i u_j)}_{= f^{(1)}}] + \omega[V_K f^{(0)}, \underbrace{(\mathcal{A}_j \nabla_j \ln T + \mathcal{B}_j \nabla_j \ln n + Z_{ij} \nabla_i u_j)}_{= f^{(1)}}]\right)$$

$$- \frac{\partial f^{(0)}}{\partial V_i} V_T \frac{1}{n V_T}\left(\omega[f^{(0)}, V_i Z_{ij} \nabla_i u_j] + \omega[V_i f^{(0)}, Z_{ij} \nabla_i u_j]\right) + \frac{\partial f^{(0)}}{\partial T} T (\ldots)$$

$$= -\frac{\partial f^{(0)}}{\partial V_i} V_T \underbrace{\xi_{ui}^{(1)}[f^{(0)}, f^{(1)}]}_{\doteq \xi_{ui}^{(1)}} + \frac{\partial f^{(0)}}{\partial T} T (\ldots)$$

$$= -\frac{\partial f^{(0)}}{\partial V_i} V_T \xi^{(1)}_{u_i}$$

$$+ \frac{\partial f^{(0)}}{\partial T} T\left(-\frac{2}{n}\omega[f^{(0)}, \mathcal{Z}_{ij}] + \frac{m}{nkTd}\left\{\omega[f^{(0)}, V^2\mathcal{S}_{ij}] + \omega[V^2 f^{(0)}, \mathcal{Z}_{ij}]\right\}\right)\nabla_i u_j$$

$$+ f^{(0)}\frac{2}{n}\omega[f^{(0)}, \mathcal{Z}_{ij}]\nabla_i u_j \qquad (4)$$

Comparant (2) et (4), on conclut que les deux derniers termes de (4) sont nuls. Cela implique-t-il que $\Omega \mathcal{Z}_{ij} = 0 \ \forall i,j$? Cela implique en tout cas que $\xi^{(1)}_n = \xi^{(1)}_T = 0$, mais ça on le savait déjà... ~~Par isotropie on doit avoir $\Omega \mathcal{Z}_{ij} = 0 \ \forall i,j$.~~ On sait :

$$(\Omega \mathcal{Z}_{ij})\nabla_i u_j = f^{(0)}\frac{2}{n}\omega[f^{(0)}, \mathcal{Z}_{ij}]\nabla_i u_j + \frac{\partial f^{(0)}}{\partial T} T\left(-\frac{2}{n}\omega[f^{(0)}, \mathcal{Z}_{ij}] + \frac{m}{nkTd}\left\{\omega[f^{(0)}, V^2\mathcal{S}_{ij}] + \omega[V^2 f^{(0)}, \mathcal{Z}_{ij}]\right\}\right)\nabla_i u_j$$

$$= 0 \qquad (5)$$

On veut :

$$(\Omega \mathcal{Z}_{ij}) = 0 \qquad (6)$$

Le problème étant isotrope, les termes diagonaux de $\Omega \mathcal{Z}_{ij}$ doivent tous être égaux ~~"a"~~, et de même pour les termes hors-diagonaux :

On peut aussi le vérifier explicitement

$$(\Omega \mathcal{Z}_{ij}) = a \cdot \delta_{ij} + b(1-\delta_{ij}) \qquad (7)$$

Comme $\Omega \mathcal{Z}_{ij}\nabla_i u_j = 0$, alors (7) et (5) donnent :

$$(\Omega \mathcal{Z}_{ij})\nabla_i u_j = a\,\delta_{ij}\nabla_i u_j + b(1-\delta_{ij})\nabla_i u_j$$

$$= ~~a\nabla_i u_i + b\nabla_i u_j~~$$

$$= a\nabla_k u_k + \frac{d(d-1)}{2} b \nabla_k u_\ell \quad , k,\ell \in \{1,\dots,d\} \qquad (8)$$

$$= 0$$

Mais aussi, les propriétés de symétrie de $\mathcal{Z}_{ij}(V)$ étant les mêmes que celles de $D_{ij}(V)$, alors en particulier $\mathrm{Tr}\,\mathcal{Z} = \mathrm{Tr}\,D = 0$. Ainsi comme Ω est un opérateur linéaire on a :

$$\mathrm{Tr}(\Omega \mathcal{Z}) = \Omega(\mathrm{Tr}\,\mathcal{Z}) = 0 \qquad (9)$$

et :

$$\mathrm{Tr}(\Omega \mathcal{Z}) \overset{(7)}{=} d\cdot a \qquad (10)$$

Comparant (9) et (10) il vient :

$$a = 0. \qquad (11)$$

L'Eq. (8) devient ainsi :

$$\frac{d(d-1)}{2} b \nabla_k u_\ell = 0 \quad \forall k,\ell$$

$$\Rightarrow b = 0 \qquad (12)$$

Conclusion : (11) et (12) $\Rightarrow$

$$\Omega \mathcal{Z}_{ij} = 0$$

#

La distribution $f^{(1)}$

De l'Eq. (59) :

$$f^{(1)}(\underline{V}) = \mathcal{A}_i(\underline{V})\nabla_i \ln T + \mathcal{B}_i(\underline{V})\nabla_i \ln n + \mathcal{Z}_{ij}(\underline{V})\nabla_j u_i \quad , \qquad (1)$$

et des développements de Sonine (273) à (275) il vient

$$f^{(1)}(\underline{V}) = \mathcal{M}(\underline{V})\left[a_1 S_i(\underline{V})\nabla_i \ln T + b_1 S_i(\underline{V})\nabla_i \ln n + c_0 D_{ij}(\underline{V})\nabla_j u_i \right] \; ; \; \mathcal{M}(V) = \frac{n}{V_T^d} M(c). \qquad (2)$$

On peut déterminer les coefficients a_1, b_1, et c_0 en fonction des coefficients de transport η, κ, et μ donnés par les relations (164), (192), et (193) respectivement. Ainsi :

$$\begin{aligned}
\eta &\overset{(164)}{=} -\frac{1}{(d-1)(d+2)}\int_{\mathbb{R}^d} d\underline{V}\; D_{ij}(\underline{V})\,\mathcal{Z}_{ij}(\underline{V}) \\
&\overset{(275)}{=} -\frac{1}{(d-1)(d+2)}\,c_0\int_{\mathbb{R}^d} d\underline{V}\; D_{ij}(\underline{V})\,\mathcal{M}(\underline{V})\,D_{ij}(\underline{V}) \\
&\overset{(286)}{=} -c_0\,\frac{1}{(d-1)(d+2)}\,\frac{(d+2)(d-1)}{\beta^2}\,n \\
&= -c_0\,\frac{n}{\beta^2} \qquad (3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\kappa &\overset{(192)}{=} -\frac{1}{dT}\int_{\mathbb{R}^d} d\underline{V}\; S_i(\underline{V})\,\mathcal{A}_i(\underline{V}) \\
&\overset{(273)}{=} -a_1\,\frac{1}{dT}\int_{\mathbb{R}^d} d\underline{V}\; S_i(\underline{V})\,\mathcal{M}(\underline{V})\,S_i(\underline{V}) \\
&\overset{(284)}{=} -a_1\,\frac{1}{\not{d}T}\,\frac{\not{d}(d+2)}{2}\,\frac{n}{m\beta^3} \\
&= -a_1\,\frac{d+2}{2}\,\frac{n k_B}{m\beta^2} \qquad (4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mu &\overset{(193)}{=} -\frac{1}{dn}\int_{\mathbb{R}^d} d\underline{V}\; S_i(\underline{V})\,\mathcal{B}_i(\underline{V}) \\
&\overset{(274)}{=} -b_1\,\frac{1}{dn}\int_{\mathbb{R}^d} d\underline{V}\; S_i(\underline{V})\,\mathcal{M}(\underline{V})\,S_i(\underline{V}) \\
&\overset{(284)}{=} -b_1\,\frac{1}{\not{d}\not{n}}\,\frac{\not{d}(d+2)}{2}\,\frac{\not{n}}{m\beta^3} \\
&= -b_1\,\frac{d+2}{2}\,\frac{1}{m\beta^3} \qquad (5)
\end{aligned}$$

On vérifie bien que les relations (3) à (5) dans le cas particulier $d=3$ redonnent celles dans \cite{premier}. On en tire donc :

$$c_0 = -\frac{\beta^2}{n}\eta \qquad (6)$$

$$a_1 = -\frac{2}{d+2}\,\frac{m\beta^2}{n k_B}\,\kappa \qquad (7)$$

$$b_1 = -\frac{2}{d+2}\,m\beta^3\mu \qquad (8)$$

Les relations (6) à (8) dans l'Eq. (2) fournissent finalement :

$$f^{(1)}(\underline{V}) = -\mathcal{M}(\underline{V})\left[\frac{2}{d+2}\,\frac{m\beta^2}{n k_B}\,\kappa\,\underbrace{\frac{1}{T}}_{=\beta}\, S_i(\underline{V})\nabla_i T + \frac{2}{d+2}\,m\beta^3\mu\,\frac{1}{n}\,S_i(\underline{V})\nabla_i n + \frac{\beta^2}{n}\eta\, D_{ij}(\underline{V})\nabla_j u_i \right]$$

$$\boxed{f^{(1)}(\underline{V}) = -\frac{\beta^3}{n}\mathcal{M}(V)\left[\frac{2m}{d+2}\,S_i(\underline{V})\left(\kappa\nabla_i T + \mu\nabla_i n\right) + \frac{\eta}{\beta}\,D_{ij}(\underline{V})\nabla_j u_i \right]} \qquad (9)$$

On vérifie que les unités de $f^{(1)}(V)$ sont bien données par $\mathcal{M}(V)$ uniquement.

Ordre deux :

Comme le tenseur de pression P_{ij} défini par l'Eq. (156)

$$P_{ij}(\mathbf{r},t) = p\,\delta_{ij} - 2\eta\left[\tfrac{1}{2}(\nabla_i u_j + \nabla_j u_i) - \tfrac{1}{d}\,\delta_{ij}\nabla_i u_j\right] - \zeta\,\delta_{ij}\nabla_i u_j \qquad (1)$$

et le courant de chaleur q_i défini par l'Eq. (155)

$$q_i(\mathbf{r},t) = -\kappa\nabla_i T - \mu\nabla_i n \qquad (2)$$

sont des grandeurs d'ordre 1 dans les gradients, alors leur insertion dans les Eqs. de bilan (38) engendre des contributions d'ordre deux dans les gradients. Ainsi il existe des termes d'ordre deux (Burnett) qui contribuent à l'ordre Navier-Stokes, et la connaissance de $f^{(2)}$ s'avère nécessaire [\cite{premier}]. Néanmoins, il a été montré dans le contexte du gaz faiblement inélastique que ces contributions étaient négligeables devant celles d'ordre 1 \cite{premier}. Dans la limite élastique qui nous intéresse, elles sont environ 10^4 fois plus faibles que l'ordre linéaire.

Nous allons donc par souci de simplicité négliger ces contributions. Ainsi, lorsque la probabilité d'annihilation p est proche de zéro, cette approximation devrait être bien justifiée. Par contre, pour $p \lesssim 1$ l'annihilation domine et nous ne savons pas a priori si ces termes d'ordre deux sont négligeables. Nous supposons néanmoins que tel est le cas en bonne approximation.

En effet, les coefficients de transport obtenus précédemment ne sont valides qu'à l'ordre Navier-Stokes : on a utilisé $P_{ij} = p^{(0)}\delta_{ij}$ et $q_i = 0$ pour obtenir l'Éq. de bilan d'énergie (67).

Résumé :

Les Eqs. (237) donnent les coefficients η^*, κ^*, et μ^* de façon implicite. Il faut résoudre le système (sans difficulté technique). Résumons ce que l'on a obtenu :

$$P_{ij} = p^{(0)}\delta_{ij} - \eta\left(\nabla_i u_j + \nabla_j u_i - \frac{2}{d}\,\delta_{ij}\nabla_i u_j\right) \; ; \qquad p^{(0)} = nkT.$$

$$q_i = -\kappa\nabla_i T - \mu\nabla_i n$$

$$\eta^* = \frac{\eta}{\eta_0} = \frac{1}{\nu_\eta^* - \frac{1}{2}p\,\zeta_T^{(0)*}}$$

$$\kappa^* = \frac{\kappa}{\kappa_0} = \frac{1}{\nu_\kappa^* - 2p\,\zeta_T^{(0)*}}\left[\frac{1}{2}p\,\zeta_n^{(0)*}\mu^* + \frac{d-1}{d}(2a_2+1)\right]$$

$$\mu^* = \frac{n\mu}{T\kappa_0} = \frac{2}{2\nu_\mu^* - 3p\,\zeta_T^{(0)*} - 2p\,\zeta_n^{(0)*}}\left[p\,\zeta_T^{(0)*}\kappa^* + \frac{d-1}{2d}2a_2\right]$$

$$\nu_\kappa^* = \nu_\mu^* = p\left[\frac{19+42d+24d^2+4d^3}{32d} + 2a_2\,\frac{960-812d-3190d^2-1255d^3+570d^4+436d^5+72d^6}{1024d^2}\right] + (1-p)\left[1+\frac{1}{64}2a_2\right]$$

$$\nu_\eta^* = p\left[\frac{-12-6d+13d^2+5d^3}{8d(d-1)} + 2a_2\,\frac{86-196d-496d^2-176d^3+12d^4+8d^5}{d(d-1)}\right] + (1-p)\left[1-\frac{1}{64}2a_2\right]$$

$$\zeta_n^{(0)*} = \frac{\zeta_n^{(0)}}{\nu_0} = \frac{d+2}{4}\left(1-\frac{1}{32}2a_2\right)$$

$$\zeta_T^{(0)*} = \frac{\zeta_T^{(0)}}{\nu_0} = \frac{d+2}{8}\left[2d-1+\frac{6d+13}{32}2a_2\right]$$

$$\kappa_0 = \frac{d(d+2)}{2(d-1)}\frac{k_B}{m}\eta_0 \quad ; \quad \eta_0 = \frac{p^{(0)}}{\nu_0}, \quad p^{(0)} = nk_BT, \quad \eta_0 = \frac{d+2}{8}\,\frac{\Gamma(d/2)}{\pi^{(d-1)/2}}\,\frac{\sqrt{mk_BT}}{\sigma^{d-1}}$$

Et les équations de Bilan (38) sont (en tenant compte des Eqs. (54) à (56) ainsi que (63), (65), et (67)) :

$$\partial_t n + \nabla(nu_i) = -p\,n\left(\zeta_n^{(0)} + \zeta_n^{(1)}\right)$$

$$\partial_t u_i + \frac{k_B}{mn}\nabla_j P_{ij} + u_j\nabla_j u_i = -p\left(\zeta_{u_i}^{(0)} + \zeta_{u_i}^{(1)}\right)$$

$$\partial_t T + u_i\nabla_i T + \frac{2}{nk_Bd}\left(P:\nabla u + \nabla_j q_i\right) = -pT\left(\zeta_T^{(0)} + \zeta_T^{(1)}\right)$$

où $\zeta_{u_i}^{(0)} = 0$ par l'Eq. (140). Les taux de déclin à l'ordre 1 sont :

$$\zeta_n^{(1)} \overset{(121)}{=} \frac{2}{n}\,\omega\left[f^{(0)}, f^{(1)}\right]$$

$$\zeta_{u_i}^{(1)} \overset{(122)}{=} \frac{1}{n}\,\omega\left[f^{(0)}, V_i f^{(1)}\right] + \frac{1}{n}\,\omega\left[f^{(1)}, V_i f^{(0)}\right]$$

$$\zeta_T^{(1)} \overset{(123)}{=} -\frac{2}{n}\,\omega\left[f^{(0)}, f^{(1)}\right] + \frac{m}{nk_BTd}\,\omega\left[f^{(0)}, V^2 f^{(1)}\right] + \frac{m}{nk_BTd}\,\omega\left[f^{(1)}, V^2 f^{(0)}\right],$$

avec

$$\omega[f,g] = \sigma^{d-1}\beta_1\int_{\mathbb{R}^{2d}} dv_1\,dv_2\,|V_{12}|\,g(r_1,v_1;t)\,f(r_2,v_2;t),$$

$$f^{(0)}(\underline{v}) = \mathcal{M}(V)\left[1+a_2S_2(c^2)\right], \quad \mathcal{M}(V) = \frac{n}{V_T^d}\mathcal{M}(c) = \frac{n}{V_T^d}\frac{1}{\pi^{d/2}}e^{-c^2}, \quad c = V/V_T.$$

$$f^{(1)}(\underline{V}) = -\frac{\beta^3}{n}\mathcal{M}(V)\left[\frac{2m}{d+2}S_i(\underline{V})\left(\kappa\nabla_i T + \mu\nabla_i n\right) + \frac{\eta}{\beta}D_{ij}(\underline{V})\,\nabla_j u_i\right]$$

Les taux à l'ordre 1 peuvent donc être calculés explicitement avec les relations ci-dessus.

▶ Etapes de calcul: RÉSUMÉ

TAUX DE DÉCLIN AU PREMIER ORDRE

$$\xi_{u_i}^{(1)} = \frac{1}{n v_T}\left(\omega[f^{(0)}, V_i f^{(1)}] + \omega[V_i f^{(0)}, f^{(1)}] \right) \quad (1)$$

Avec:

$$\omega[Af^{(0)}, Bf^{(1)}] = \sigma^{d-1}\beta_1 \int_{\mathbb{R}^{2d}} dv_1 dv_2 |V_{12}| \left(-\frac{\beta^3}{n}\mathcal{M}(V_1)\right)\left[\frac{2m}{d+2} S_i(V_1)(\varkappa \nabla_i T + \mu \nabla_i n) + \frac{\eta}{\beta} D_{ij}(V_1)\nabla_j u_i\right] \times$$
$$\times \mathcal{M}(V_2)[1 + a_2 S_2(c_2^2)]\, A(V_2) B(V_1)$$
$$\vdots$$
$$= -\frac{\Gamma(d/2)}{\Gamma(\frac{d+1}{2})}\frac{n}{\pi^d}\frac{d+2}{4}\left[\frac{d}{\sqrt{2}(d-1)} v_T (\varkappa^* \tfrac{1}{T}\nabla_i T + \mu^* \tfrac{1}{n}\nabla_i n) I_1 + \sqrt{2}\eta^* \nabla_j u_i I_2\right], \quad (2)$$

où:

$$I_1 = \int_{\mathbb{R}^d} dc_{12} |c_{12}| e^{-c_{12}^2/2} \int_{\mathbb{R}^d} dc\, e^{-2c^2} A(v_T c_2) B(v_T c_1) \underbrace{\left[c^2 + \tfrac{1}{4}c_{12}^2 + (c\cdot c_{12}) - \tfrac{d+2}{2}\right](c_i + \tfrac{1}{2}c_{12i})\left[1 + a_2 S_2(c_2^2)\right]}_{:= K_1} \quad (3)$$

$$I_2 = \int_{\mathbb{R}^d} dc_{12}|c_{12}| e^{-c_{12}^2/2} \int_{\mathbb{R}^d} dc\, e^{-2c^2} A(v_T c_2) B(v_T c_1) \underbrace{\left[(c_i + \tfrac{1}{2}c_{12i})(c_j + \tfrac{1}{2}c_{12j}) - \tfrac{1}{d}\delta_{ij}c^2 - \tfrac{1}{d}\delta_{ij}\tfrac{c_{12}^2}{4} - \tfrac{1}{d}\delta_{ij}(c\cdot c_{12})\right] \times [1 + a_2 S_2(c_2^2)]}_{:= K_2} \quad (4)$$

où:

$$(A,B) = \{ (V_{2i}, 1); (1, V_{1i}) \}$$

et on a fait le changement de variables $\underline{c}_i = \underline{V}_i / v_T$, $i = 1,2$, puis $\underline{c}_{12} = \underline{c}_1 - \underline{c}_2$; $\underline{c} = (\underline{c}_1 + \underline{c}_2)/2$, et $S_2(x^2) = x^4/2 - (d+2)/2 \cdot x^2 + d(d+2)/4$. Les expressions pour K_1 et K_2 sont à développer. Utilisant $\underline{c}_1 = \underline{c} + \frac{1}{2}\underline{c}_{12}$ et $\underline{c}_2 = \underline{c} - \frac{1}{2}\underline{c}_{12}$ on a:

- $(A,B) = (V_2, 1)$:

$$I_1 = v_T \int_{\mathbb{R}^{2d}} dc_{12} |c_{12}| e^{-c_{12}^2/2} \int_{\mathbb{R}^d} dc\, e^{-2c^2}\left[c_i K_1^{c_i} - \tfrac{1}{2}c_{12i} K_1^{c_{12i}}\right] \quad ; \quad I_2 = 0 \quad (5)$$

- $(A,B) = (1, V_1)$:

$$I_1 = v_T \int_{\mathbb{R}^{2d}} dc_{12} |c_{12}| e^{-c_{12}^2/2} \int_{\mathbb{R}^d} dc\, e^{-2c^2}\left[c_i K_1^{c_i} + \tfrac{1}{2}c_{12i} K_1^{c_{12i}}\right] \quad ; \quad I_2 = 0 \quad (6)$$

où on a noté $K_1^{c_i}$ et $K_1^{c_{12i}}$ les termes de K_1 dont la contribution à l'intégrale est non nulle lorsque on multiplie par c_i et c_{12i} respectivement (pour des raisons de symétrie). La nullité de I_2 s'explique par le fait que dans chaque moment de K_2 apparaît soit un moment $c_{ke} c_{12e}$, soit un moment $(c\cdot c_{12})^p$. Donc si on multiplie ces moments par c_i ou c_{12i}, les contributions à I_2 seront nulles. Comme $\xi_{u_i}^{(1)}$ s'obtient de la somme de I_1 pour $(A,B) = (V_2, 1)$ et de I_1 pour $(A,B) = (1, V_1)$, alors il suffit de calculer l'intégrale de $K_1^{c_i}$. Le calcul est long, et on utilise les expressions des moments gaussiens anisotropes, ainsi que leurs sommes:

$$M_{jk}^a M_{ik}^{a'} = M^a M^{a'} \delta_{ij} \; ; \; M_{ke}^a M_{ke}^{a'} = d M^a M^{a'}$$

$$M_{ijke}^a M_{ke}^{a'} = \frac{d+2}{3} b^a M^{a'} \delta_{ij} \; ; \; M_{ikem}^a M_{jkem}^{a'} = \frac{d+2}{3} b^a b^{a'} \delta_{ij} \; ; \; M_{kemn}^a M_{kemn}^{a'} = \frac{d(d+2)}{3} b^a b^{a'}$$

▶ cf. notes principales

vérification: $\int c_q K_1^{c_q} = 0$

4.1. Equations hydrodynamiques : taux de déclin

Il faut calculer explicitement les taux de déclin à l'ordre 1. Interviennent les intégrales $\omega[f^{(0)}, f^{(1)}]$, $\omega[V_i^k f^{(0)}, V_i^e f^{(1)}]$, $(k,e)=\{(1,0),(0,1)\}$, $\omega[V^k f^{(0)}, V^e f^{(1)}]$, $(k,e)=\{(2,0),(0,2)\}$. On va donc pouvoir trouver une expression générique pour tous ces termes grâce aux symétries, jusqu'à un certain point. En effet, les termes de contribution non nulle dans $\omega[V^k f^{(0)}, V^e f^{(1)}]$, $(k,e)=\{(0,0),(2,0),(0,2)\}$, seront de contribution nulle dans $\omega[V_i^k f^{(0)}, V_i^e f^{(1)}]$ à cause de la modification de symétrie due aux poids V_i. Notons ainsi :

$$\omega[A f^{(0)}, B f^{(1)}] \tag{1}$$

où :

$$(A,B)=\{(1,1),(V_2^2,1),(1,V_1^2),(V_{2i},1),(1,V_{1i})\}. \tag{2}$$

On a donc :

$$\omega[A f^{(0)}, B f^{(1)}] = \sigma^{d-1}\beta_1 \int_{\mathbb{R}^{2d}} dv_1 dv_2 \, |V_{12}| \left(-\frac{\beta^3}{n}\mathcal{M}(V_1)\right)\left[\frac{2m}{d+2} S_i(V_1)\left(\varkappa \nabla_i T + \mu \nabla_i n\right) + \frac{\eta}{\beta} D_{ij}(V_1)\nabla_j u_i\right] \times$$
$$\times \mathcal{M}(V_2)\left[1+a_2 S_2(c_2^2)\right] A(V_2) B(V_1)$$
$$= -\sigma^{d-1}\beta_1 \frac{\beta^3}{n}\frac{n^2}{V_T^{2d}}\frac{1}{\pi^d}\int_{\mathbb{R}^{2d}} dv_1 dv_2 \, |V_{12}| \, e^{-V_1^2/V_T^2} e^{-V_2^2/V_T^2} A(V_2)B(V_1)\left[1+a_2 S_2\left(\tfrac{V_2^2}{V_T^2}\right)\right] \times$$
$$\times \left[\frac{2m}{d+2} S_i(V_1)\left(\varkappa\nabla_i T + \mu \nabla_i n\right) + \frac{\eta}{\beta} D_{ij}(V_1)\nabla_j u_i\right]$$
$$= -\beta_1 \frac{\sigma^{d-1}\beta^3 n}{\pi^d} V_T \int_{\mathbb{R}^{2d}} dc_1 dc_2 \, |c_{12}| \, e^{-c_1^2} e^{-c_2^2} A(V_T c_2) B(V_T c_1)\left[1+a_2 S_2(c_2^2)\right] \times$$
$$\times \left[\frac{2m}{d+2} S_i(V_T c_1)\left(\varkappa\nabla_i T+\mu\nabla_i n\right) + \frac{\eta}{\beta} D_{ij}(V_T c_1)\nabla_j u_i\right]$$
$$= -\beta_1 \frac{\sigma^{d-1}\beta^3 n}{\pi^d} V_T \frac{2m}{d+2}\left(\varkappa \nabla_i T + \mu \nabla_i n\right)\int_{\mathbb{R}^{2d}} dc_1 dc_2 \, A(V_T c_2) B(V_T c_1) \, |c_{12}| \, e^{-c_1^2} e^{-c_2^2}\left[1+a_2 S_2(c_2^2)\right] \times$$
$$\times \left(\frac{m}{2}V_T^2 c_1^2 - \frac{d+2}{2}\underbrace{(k_B T)}_{=1/\beta = \frac{m}{2}\frac{2}{\beta m} = \frac{m}{2}V_T^2}\right) V_T c_{1i}$$
$$-\beta_1 \frac{\sigma^{d-1}\beta^3 n}{\pi^d} V_T \frac{\eta}{\beta}\nabla_j u_i \int_{\mathbb{R}^{2d}} dc_1 dc_2 \, A(V_T c_2) B(V_T c_1) \, |c_{12}| \, e^{-c_1^2} e^{-c_2^2}\left[1+a_2 S_2(c_2^2)\right] \times$$
$$\times m\left(V_T^2 c_{1i} c_{1j} - \frac{1}{d} V_T^2 c_1^2 \delta_{ij}\right) \tag{3}$$

Passage dans les coordonnées du centre de masse :

$$\left.\begin{aligned} \underline{c}_{12} &= \underline{c}_1 - \underline{c}_2 \\ \underline{c} &= \tfrac{1}{2}(\underline{c}_1 + \underline{c}_2) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} \underline{c}_1 &= \underline{c} + \tfrac{1}{2}\underline{c}_{12} \\ \underline{c}_2 &= \underline{c} - \tfrac{1}{2}\underline{c}_{12} \end{aligned}\right.$$

Ainsi :

$$c_1^2 + c_2^2 = 2c^2 + \tfrac{1}{2} c_{12}^2$$
$$c_{\substack{1\\2}}^2 = c^2 + \tfrac{1}{4} c_{12}^2 \pm (\underline{c}\cdot\underline{c}_{12})$$
$$S_2(c_2^2) = \frac{1}{2}c_2^4 - \frac{d+2}{2}c_2^2 + \frac{d(d+2)}{4}$$
$$= \frac{1}{2}\left[c^2 + \tfrac{1}{4}c_{12}^2 - (c\cdot c_{12})\right]^2 - \frac{d+2}{2}\left[c^2 + \tfrac{1}{4}c_{12}^2 - (c\cdot c_{12})\right] + \frac{d(d+2)}{4}$$
$$= \frac{1}{2}\left[c^4 + \tfrac{1}{16}c_{12}^4 + \tfrac{1}{2}c^2 c_{12}^2 + (c\cdot c_{12})^2 - 2c^2(c\cdot c_{12}) - \tfrac{1}{2}c_{12}^2(c\cdot c_{12})\right]$$
$$- \frac{d+2}{2}c^2 - \frac{d+2}{8}c_{12}^2 + \frac{d+2}{2}(c\cdot c_{12}) + \frac{d(d+2)}{4}$$
$$= \frac{1}{2}c^4 + \frac{1}{32}c_{12}^4 + \frac{1}{4}c^2 c_{12}^2 + \frac{1}{2}(c\cdot c_{12})^2 - c^2(c\cdot c_{12}) - \frac{1}{4}c_{12}^2(c\cdot c_{12}) - \frac{d+2}{2}c^2 - \frac{d+2}{8}c_{12}^2$$
$$+ \frac{d+2}{2}(c\cdot c_{12}) + \frac{d(d+2)}{4}$$
$$= \frac{1}{2}c^4 + \frac{1}{32}c_{12}^4 + \frac{1}{4}c^2 c_{12}^2 - \frac{d+2}{2}c^2 - \frac{d+2}{8}c_{12}^2 + \frac{1}{2}(c\cdot c_{12})^2 - c^2(c\cdot c_{12}) - \frac{1}{4}c_{12}^2(c\cdot c_{12}) + \frac{d(d+2)}{2}(c\cdot c_{12})$$
$$+ \frac{d(d+2)}{4} \tag{4}$$

$$= -\frac{\pi^{(d-1)/2}}{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)} \frac{\sigma^{d-1}\beta^3 n}{\pi^d} \left(\frac{2}{\beta m}\right)^2 \frac{2m}{d+2} \frac{m}{2} \left(\kappa \nabla_i T + \mu \nabla_i n\right) I_1 \qquad ;\ \kappa = \kappa_0 \kappa^* ;\ \mu = \frac{T\kappa_0}{n}\mu^*$$

$$- \frac{\pi^{(d-1)/2}}{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)} \frac{\sigma^{d-1}\beta^3 n}{\pi^d} \frac{2}{\beta m} \sqrt{\frac{2}{\beta m}} \frac{m}{\beta} \eta \nabla_j u_i I_2 \qquad ;\ \eta = \eta_0 \eta^* ;\ \kappa_0 = \frac{d(d+2)}{2(d-1)} \frac{k_B}{m} \eta_0$$

$$= -\frac{\cancel{\pi^{(d-1)/2}}}{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)} \frac{\cancel{\sigma^{d-1}}\beta^3 n}{\pi^d} \frac{\cancel{2^2}}{\cancel{\beta^2}\cancel{m^2}} \frac{2m}{\cancel{d+2}} \frac{\cancel{m}}{\cancel{2}} \frac{d\cancel{(d+2)}}{\cancel{2}(d-1)} \frac{k_B}{m} \frac{d+2}{8} \frac{\Gamma(d/2)}{\cancel{\pi^{(d+1)/2}}} \frac{\sqrt{m k_B T}}{\cancel{\sigma^{d-1}}} \left(\kappa^* \nabla_i T + \frac{T}{n}\mu^* \nabla_i n\right) I_1$$

$$- \frac{\cancel{\pi^{(d-1)/2}}}{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)} \frac{\cancel{\sigma^{d-1}}\beta^{\cancel{3}} n}{\pi^d} \frac{2}{\cancel{\beta m}} \sqrt{\frac{2}{\beta m}} \frac{\cancel{m}}{\cancel{\beta}} \frac{d+2}{8} \frac{\Gamma(d/2)}{\cancel{\pi^{(d+1)/2}}} \frac{\sqrt{m k_B T}}{\cancel{\sigma^{d-1}}} \eta^* \nabla_j u_i I_2$$

$$= -\frac{\Gamma(d/2)}{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)} \frac{1}{\pi^d} \frac{\beta n\, d\, 2}{d-1} \underbrace{\frac{k_B}{m}}_{=1/T} \frac{d+2}{8} \underbrace{\sqrt{\frac{m}{\beta}} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}}_{=v_T} \left(\kappa^* \nabla_i T + \frac{T}{n}\mu^* \nabla_i n\right) I_1$$

$$- \frac{\Gamma(d/2)}{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)} \frac{1}{\pi^d}\, 2 \cancel{\beta} n \frac{d+2}{8} \sqrt{\frac{2}{\cancel{\beta m}} \frac{\cancel{m}}{\cancel{\beta}}}\, \eta^* \nabla_j u_i I_2$$

$$= -\frac{\Gamma(d/2)}{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)} \frac{1}{\pi^d} \frac{d(d+2)}{4\sqrt{2}(d-1)} n v_T \left(\kappa^* \frac{1}{T} \nabla_i T + \mu^* \frac{1}{n} \nabla_i n\right) I_1$$

$$- \frac{\Gamma(d/2)}{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)} \frac{1}{\pi^d} \frac{d+2}{4} \sqrt{2}\, n\, \eta^* \nabla_j u_i I_2 \qquad (5b)$$

Ainsi :

$$\omega[Af^{(1)}, Bf^{(1)}] = -\beta_1 \frac{\sigma^{d-1}\beta^3 n}{\pi^d} V_T^2 \frac{2m}{d+2} \frac{m}{2} V_T^2 (\kappa \nabla_i T + \mu \nabla_i n)\, I_1 - \beta_1 \frac{\sigma^{d-1}\beta^3 n}{\pi^d} V_T \frac{1}{\beta} m V_T^2 \nabla_j u_i \, I_2 \,, \tag{5}$$

②b

où :

$$I_1 = \int_{\mathbb{R}^d} dc_{12}\, |c_{12}|\, e^{-c_{12}^2/2} \int_{\mathbb{R}^d} dc\, e^{-2c^2} A(V_T c_2) B(V_T c_1) \underbrace{\left[c^2 + \tfrac{1}{4}c_{12}^2 + (c\cdot c_{12}) - \tfrac{d+2}{2}\right]\left(c_i + \tfrac{1}{2}c_{12i}\right)\left[1 + a_2 S_2(c_2^2)\right]}_{:= K_1} \tag{6}$$

$$I_2 = \int_{\mathbb{R}^d} dc_{12}\, |c_{12}|\, e^{-c_{12}^2/2} \int_{\mathbb{R}^d} dc\, e^{-2c^2} A(V_T c_2) B(V_T c_1) \underbrace{\left[\left(c_i + \tfrac{1}{2}c_{12i}\right)\left(c_j + \tfrac{1}{2}c_{12j}\right) - \tfrac{1}{d}\delta_{ij}c^2 - \tfrac{1}{d}\delta_{ij}\tfrac{1}{4}c_{12}^2 - \tfrac{1}{d}\delta_{ij}(c\cdot c_{12})\right] \times \left[1 + a_2 S_2(c_2^2)\right]}_{:= K_2} \tag{7}$$

En développant K_1 et K_2 à l'aide d'un logiciel de calcul symbolique, on trouve :

$$\begin{aligned} K_1 = {} & -\frac{\mathrm{c12i}}{2} + \frac{c^2\,\mathrm{c12i}}{2} + \frac{\mathrm{c12}^2\,\mathrm{c12i}}{8} - \mathrm{ci} + c^2\,\mathrm{ci} + \\ & \frac{\mathrm{c12}^2\,\mathrm{ci}}{4} - \frac{\mathrm{c12i}\,d}{4} - \frac{\mathrm{ci}\,d}{2} + \frac{\mathrm{c12i}\,\mathrm{prod}}{2} + \mathrm{ci}\,\mathrm{prod} + \\ & \mathrm{a2}\Bigg(\frac{c^2\,\mathrm{c12i}}{2} - \frac{3c^4\,\mathrm{c12i}}{4} + \frac{c^6\,\mathrm{c12i}}{4} + \frac{\mathrm{c12}^2\,\mathrm{c12i}}{8} - \frac{3}{8}c^2\,\mathrm{c12}^2\,\mathrm{c12i} + \frac{3}{16}c^4\,\mathrm{c12}^2\,\mathrm{c12i} - \\ & \frac{3\,\mathrm{c12}^4\,\mathrm{c12i}}{64} + \frac{3}{64}c^2\,\mathrm{c12}^4\,\mathrm{c12i} + \frac{\mathrm{c12}^6\,\mathrm{c12i}}{256} + c^2\,\mathrm{ci} - \frac{3c^4\,\mathrm{ci}}{2} + \frac{c^6\,\mathrm{ci}}{2} + \frac{\mathrm{c12}^2\,\mathrm{ci}}{4} - \\ & \frac{3}{4}c^2\,\mathrm{c12}^2\,\mathrm{ci} + \frac{3}{8}c^4\,\mathrm{c12}^2\,\mathrm{ci} - \frac{3\,\mathrm{c12}^4\,\mathrm{ci}}{32} + \frac{3}{32}c^2\,\mathrm{c12}^4\,\mathrm{ci} + \frac{\mathrm{c12}^6\,\mathrm{ci}}{128} - \frac{\mathrm{c12i}\,d}{4} + \\ & \frac{3}{4}c^2\,\mathrm{c12i}\,d - \frac{3}{8}c^4\,\mathrm{c12i}\,d + \frac{3}{16}\mathrm{c12}^2\,\mathrm{c12i}\,d - \frac{3}{16}c^2\,\mathrm{c12}^2\,\mathrm{c12i}\,d - \frac{3}{128}\mathrm{c12}^4\,\mathrm{c12i}\,d - \\ & \frac{\mathrm{ci}\,d}{2} + \frac{3}{2}c^2\,\mathrm{ci}\,d - \frac{3}{4}c^4\,\mathrm{ci}\,d + \frac{3}{8}\mathrm{c12}^2\,\mathrm{ci}\,d - \frac{3}{8}c^2\,\mathrm{c12}^2\,\mathrm{ci}\,d - \frac{3}{64}\mathrm{c12}^4\,\mathrm{ci}\,d - \\ & \frac{\mathrm{c12i}\,d^2}{4} + \frac{1}{4}c^2\,\mathrm{c12i}\,d^2 + \frac{1}{16}\mathrm{c12}^2\,\mathrm{c12i}\,d^2 - \frac{\mathrm{ci}\,d^2}{2} + \frac{1}{2}c^2\,\mathrm{ci}\,d^2 + \frac{1}{8}\mathrm{c12}^2\,\mathrm{ci}\,d^2 - \\ & \frac{\mathrm{c12i}\,d^3}{16} - \frac{\mathrm{ci}\,d^3}{8} - \frac{1}{4}c^4\,\mathrm{c12i}\,\mathrm{prod} - \frac{1}{8}c^2\,\mathrm{c12}^2\,\mathrm{c12i}\,\mathrm{prod} - \frac{1}{64}\mathrm{c12}^4\,\mathrm{c12i}\,\mathrm{prod} - \\ & \frac{1}{2}c^4\,\mathrm{ci}\,\mathrm{prod} - \frac{1}{4}c^2\,\mathrm{c12}^2\,\mathrm{ci}\,\mathrm{prod} - \frac{1}{32}\mathrm{c12}^4\,\mathrm{ci}\,\mathrm{prod} - \frac{\mathrm{c12i}\,d\,\mathrm{prod}}{4} + \frac{1}{2}c^2\,\mathrm{c12i}\,d\,\mathrm{prod} + \\ & \frac{1}{8}\mathrm{c12}^2\,\mathrm{c12i}\,d\,\mathrm{prod} - \frac{\mathrm{ci}\,d\,\mathrm{prod}}{2} + c^2\,\mathrm{ci}\,d\,\mathrm{prod} + \frac{1}{4}\mathrm{c12}^2\,\mathrm{ci}\,d\,\mathrm{prod} - \frac{3}{8}\mathrm{c12i}\,d^2\,\mathrm{prod} + \\ & \frac{1}{4}c^2\,\mathrm{c12i}\,d^2\,\mathrm{prod} + \frac{1}{16}\mathrm{c12}^2\,\mathrm{c12i}\,d^2\,\mathrm{prod} - \frac{3}{4}\mathrm{ci}\,d^2\,\mathrm{prod} + \frac{1}{2}c^2\,\mathrm{ci}\,d^2\,\mathrm{prod} + \\ & \frac{1}{8}\mathrm{c12}^2\,\mathrm{ci}\,d^2\,\mathrm{prod} - \frac{1}{8}\mathrm{c12i}\,d^3\,\mathrm{prod} - \frac{1}{4}\mathrm{ci}\,d^3\,\mathrm{prod} - \frac{\mathrm{c12i}\,\mathrm{prod}^2}{4} - \frac{1}{4}c^2\,\mathrm{c12i}\,\mathrm{prod}^2 - \\ & \frac{1}{16}\mathrm{c12}^2\,\mathrm{c12i}\,\mathrm{prod}^2 - \frac{\mathrm{ci}\,\mathrm{prod}^2}{2} - \frac{1}{2}c^2\,\mathrm{ci}\,\mathrm{prod}^2 - \frac{1}{8}\mathrm{c12}^2\,\mathrm{ci}\,\mathrm{prod}^2 + \frac{3}{8}\mathrm{c12i}\,d\,\mathrm{prod}^2 + \\ & \frac{3}{4}\mathrm{ci}\,d\,\mathrm{prod}^2 + \frac{1}{4}\mathrm{c12i}\,d^2\,\mathrm{prod}^2 + \frac{1}{2}\mathrm{ci}\,d^2\,\mathrm{prod}^2 + \frac{\mathrm{c12i}\,\mathrm{prod}^3}{4} + \frac{\mathrm{ci}\,\mathrm{prod}^3}{2}\Bigg) \end{aligned} \tag{8}$$

où on a noté "prod" pour $(c\cdot c_{12})$, et :

$$
\begin{aligned}
K_2 = {} & \frac{\mathrm{c12i\,c12j}}{4} + \frac{\mathrm{c12j\,ci}}{2} + \frac{\mathrm{c12i\,cj}}{2} + \mathrm{ci\,cj} - \frac{\mathrm{c^2\,deltaij}}{\mathrm{d}} - \frac{\mathrm{c12^2\,deltaij}}{4\,\mathrm{d}} - \\
& \frac{\mathrm{deltaij\,prod}}{\mathrm{d}} + \mathrm{a2}\Big(-\frac{1}{4}\mathrm{c^2\,c12i\,c12j} + \frac{1}{8}\mathrm{c^4\,c12i\,c12j} - \frac{1}{16}\mathrm{c12^2\,c12i\,c12j} + \\
& \frac{1}{16}\mathrm{c^2\,c12^2\,c12i\,c12j} + \frac{1}{128}\mathrm{c12^4\,c12i\,c12j} - \frac{1}{2}\mathrm{c^2\,c12j\,ci} + \frac{1}{4}\mathrm{c^4\,c12j\,ci} - \\
& \frac{1}{8}\mathrm{c12^2\,c12j\,ci} + \frac{1}{8}\mathrm{c^2\,c12^2\,c12j\,ci} + \frac{1}{64}\mathrm{c12^4\,c12j\,ci} - \frac{1}{2}\mathrm{c^2\,c12i\,cj} + \\
& \frac{1}{4}\mathrm{c^4\,c12i\,cj} - \frac{1}{8}\mathrm{c12^2\,c12i\,cj} + \frac{1}{8}\mathrm{c^2\,c12^2\,c12i\,cj} + \frac{1}{64}\mathrm{c12^4\,c12i\,cj} - \mathrm{c^2\,ci\,cj} + \\
& \frac{1}{2}\mathrm{c^4\,ci\,cj} - \frac{1}{4}\mathrm{c12^2\,ci\,cj} + \frac{1}{4}\mathrm{c^2\,c12^2\,ci\,cj} + \frac{1}{32}\mathrm{c12^4\,ci\,cj} + \frac{\mathrm{c12i\,c12j\,d}}{8} - \\
& \frac{1}{8}\mathrm{c^2\,c12i\,c12j\,d} - \frac{1}{32}\mathrm{c12^2\,c12i\,c12j\,d} + \frac{\mathrm{c12j\,ci\,d}}{4} - \frac{1}{4}\mathrm{c^2\,c12j\,ci\,d} - \\
& \frac{1}{16}\mathrm{c12^2\,c12j\,ci\,d} + \frac{\mathrm{c12i\,cj\,d}}{4} - \frac{1}{4}\mathrm{c^2\,c12i\,cj\,d} - \frac{1}{16}\mathrm{c12^2\,c12i\,cj\,d} + \\
& \frac{\mathrm{ci\,cj\,d}}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{c^2\,ci\,cj\,d} - \frac{1}{8}\mathrm{c12^2\,ci\,cj\,d} + \frac{1}{16}\mathrm{c12i\,c12j\,d^2} + \frac{1}{8}\mathrm{c12j\,ci\,d^2} + \\
& \frac{1}{8}\mathrm{c12i\,cj\,d^2} + \frac{1}{4}\mathrm{ci\,cj\,d^2} - \frac{\mathrm{c^2\,deltaij}}{2} + \frac{\mathrm{c^4\,deltaij}}{2} - \frac{\mathrm{c12^2\,deltaij}}{8} + \\
& \frac{1}{4}\mathrm{c^2\,c12^2\,deltaij} + \frac{\mathrm{c12^4\,deltaij}}{32} + \frac{\mathrm{c^4\,deltaij}}{\mathrm{d}} - \frac{\mathrm{c^6\,deltaij}}{2\,\mathrm{d}} + \\
& \frac{\mathrm{c^2\,c12^2\,deltaij}}{2\,\mathrm{d}} - \frac{3\,\mathrm{c^4\,c12^2\,deltaij}}{8\,\mathrm{d}} + \frac{\mathrm{c12^4\,deltaij}}{16\,\mathrm{d}} - \frac{3\,\mathrm{c^2\,c12^4\,deltaij}}{32\,\mathrm{d}} - \\
& \frac{\mathrm{c12^6\,deltaij}}{128\,\mathrm{d}} - \frac{1}{4}\mathrm{c^2\,d\,deltaij} - \frac{1}{16}\mathrm{c12^2\,d\,deltaij} - \frac{1}{4}\mathrm{c^2\,c12i\,c12j\,prod} - \\
& \frac{1}{16}\mathrm{c12^2\,c12i\,c12j\,prod} - \frac{1}{2}\mathrm{c^2\,c12j\,ci\,prod} - \frac{1}{8}\mathrm{c12^2\,c12j\,ci\,prod} - \\
& \frac{1}{2}\mathrm{c^2\,c12i\,cj\,prod} - \frac{1}{8}\mathrm{c12^2\,c12i\,cj\,prod} - \mathrm{c^2\,ci\,cj\,prod} - \frac{1}{4}\mathrm{c12^2\,ci\,cj\,prod} + \\
& \frac{1}{4}\mathrm{c12i\,c12j\,d\,prod} + \frac{1}{2}\mathrm{c12j\,ci\,d\,prod} + \frac{1}{2}\mathrm{c12i\,cj\,d\,prod} + \mathrm{ci\,cj\,d\,prod} + \\
& \frac{1}{8}\mathrm{c12i\,c12j\,d^2\,prod} + \frac{1}{4}\mathrm{c12j\,ci\,d^2\,prod} + \frac{1}{4}\mathrm{c12i\,cj\,d^2\,prod} + \frac{1}{2}\mathrm{ci\,cj\,d^2\,prod} - \\
& \frac{\mathrm{deltaij\,prod}}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{c^2\,deltaij\,prod} - \frac{1}{8}\mathrm{c12^2\,deltaij\,prod} + \frac{\mathrm{c^2\,deltaij\,prod}}{\mathrm{d}} + \\
& \frac{\mathrm{c^4\,deltaij\,prod}}{2\,\mathrm{d}} + \frac{\mathrm{c12^2\,deltaij\,prod}}{4\,\mathrm{d}} + \frac{\mathrm{c^2\,c12^2\,deltaij\,prod}}{4\,\mathrm{d}} + \frac{\mathrm{c12^4\,deltaij\,prod}}{32\,\mathrm{d}} - \\
& \frac{\mathrm{d\,deltaij\,prod}}{4} - \frac{1}{2}\mathrm{c^2\,d\,deltaij\,prod} - \frac{1}{8}\mathrm{c12^2\,d\,deltaij\,prod} + \frac{1}{8}\mathrm{c12i\,c12j\,prod^2} + \\
& \frac{1}{4}\mathrm{c12j\,ci\,prod^2} + \frac{1}{4}\mathrm{c12i\,cj\,prod^2} + \frac{1}{2}\mathrm{ci\,cj\,prod^2} - \mathrm{deltaij\,prod^2} + \\
& \frac{\mathrm{c^2\,deltaij\,prod^2}}{2\,\mathrm{d}} + \frac{\mathrm{c12^2\,deltaij\,prod^2}}{8\,\mathrm{d}} - \frac{1}{2}\mathrm{d\,deltaij\,prod^2} - \frac{\mathrm{deltaij\,prod^3}}{2\,\mathrm{d}}\Big)
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Pour des raisons de symétrie, on voit que les termes suivants sont nuls :

$$\int_{\mathbb{R}^d} dc_{12}\, |c_{12}|^n\, e^{-c_{12}^2/2} \int_{\mathbb{R}^d} dc\, c^m\, e^{-2c^2}\, F(c, c_{12}) = 0 \tag{10}$$

dès qu'il y a une puissance impaire de l'une des variables (ou les deux), le résultat de l'intégration sera toujours nul : changements de variables $(c, c_{12}) \to (-c, c_{12})$ ou $(c, c_{12}) \to (c, -c_{12})$ ou $(c, c_{12}) \to (-c, -c_{12})$.

$$F(c, c_{12}) = \left\{ c_i\,,\ c_{12i}\,,\ c_i\, c_{12j}\,,\ (c\cdot c_{12})^{2p+1}\,,\ c_i\,(c\cdot c_{12})^{p}\,,\ c_{12i}\,(c\cdot c_{12})^{p}\,,\ c_i c_j\,(c\cdot c_{12})^{2p+1}\,,\ c_{12i} c_{12j}\,(c\cdot c_{12})^{2p+1}\,,\ c_i c_{12j}\,(c\cdot c_{12})^{2p} \right\}, \tag{11}$$

où $p \in \mathbb{N}$. Ainsi en remplaçant (9) et (8) dans (7) et (6), plusieurs termes sont de contribution nulle selon les valeurs de A et B. Nous devons donc établir séparément quelles sont les contributions non nulles de K pour les différents poids vus de A et B. On distingue ainsi les poids de symétries particulières suivants : $\{c^2, c_{12}^2, 1\}$, $(c \cdot c_{12})$; c_q, c_{12q}, où $q \in \{1,..d\}$, et les contributions non nulles correspondantes seront notées :

$$K^{c^2, c_{12}^2}\ ,\quad K^{(c\cdot c_{12})}\ ;\quad K^{c_q}\ ;\quad K^{c_{12q}}$$

On voit tout de suite que $K_1^{c^2, c_{12}^2} = 0$ car de l'expression (6) chaque moment comportera une puissance c_i ou c_{12i}, sans produit $c_i c_{12i}$.

On trouve :

$$
\begin{aligned}
K_2^{c_{12}q} = {} & \frac{c12i\,c12j}{4} + \frac{c12j\,ci}{2} + \frac{c12i\,cj}{2} + ci\,cj - \frac{c^2\,deltaij}{d} - \frac{c12^2\,deltaij}{4\,d} - \\
& \frac{deltaij\,prod}{d} + a2\Big(-\frac{1}{4}c^2\,c12i\,c12j + \frac{1}{8}c^4\,c12i\,c12j - \frac{1}{16}c12^2\,c12i\,c12j + \\
& \frac{1}{16}c^2\,c12^2\,c12i\,c12j + \frac{1}{128}c12^4\,c12i\,c12j - \frac{1}{2}c^2\,c12j\,ci + \frac{1}{4}c^4\,c12j\,ci - \\
& \frac{1}{8}c12^2\,c12j\,ci + \frac{1}{8}c^2\,c12^2\,c12j\,ci + \frac{1}{64}c12^4\,c12j\,ci - \frac{1}{2}c^2\,c12i\,cj + \\
& \frac{1}{4}c^4\,c12i\,cj - \frac{1}{8}c12^2\,c12i\,cj + \frac{1}{8}c^2\,c12^2\,c12i\,cj + \frac{1}{64}c12^4\,c12i\,cj - c^2\,ci\,cj + \\
& \frac{1}{2}c^4\,ci\,cj - \frac{1}{4}c12^2\,ci\,cj + \frac{1}{4}c^2\,c12^2\,ci\,cj + \frac{1}{32}c12^4\,ci\,cj + \frac{c12i\,c12j\,d}{8} - \\
& \frac{1}{8}c^2\,c12i\,c12j\,d - \frac{1}{32}c12^2\,c12i\,c12j\,d + \frac{c12j\,ci\,d}{4} - \frac{1}{4}c^2\,c12j\,ci\,d - \\
& \frac{1}{16}c12^2\,c12j\,ci\,d + \frac{c12i\,cj\,d}{4} - \frac{1}{4}c^2\,c12i\,cj\,d - \frac{1}{16}c12^2\,c12i\,cj\,d + \\
& \frac{ci\,cj\,d}{2} - \frac{1}{2}c^2\,ci\,cj\,d - \frac{1}{8}c12^2\,ci\,cj\,d + \frac{1}{16}c12i\,c12j\,d^2 + \frac{1}{8}c12j\,ci\,d^2 + \\
& \frac{1}{8}c12i\,cj\,d^2 + \frac{1}{4}ci\,cj\,d^2 - \frac{c^2\,deltaij}{2} + \frac{c^4\,deltaij}{2} - \frac{c12^2\,deltaij}{8} + \\
& \frac{1}{4}c^2\,c12^2\,deltaij + \frac{c12^4\,deltaij}{32} + \frac{c^4\,deltaij}{d} - \frac{c^6\,deltaij}{2\,d} + \\
& \frac{c^2\,c12^2\,deltaij}{2\,d} - \frac{3\,c^4\,c12^2\,deltaij}{8\,d} + \frac{c12^4\,deltaij}{16\,d} - \frac{3\,c^2\,c12^4\,deltaij}{32\,d} - \\
& \frac{c12^6\,deltaij}{128\,d} - \frac{1}{4}c^2\,d\,deltaij - \frac{1}{16}c12^2\,d\,deltaij - \frac{1}{4}c^2\,c12i\,c12j\,prod - \\
& \frac{1}{16}c12^2\,c12i\,c12j\,prod - \frac{1}{2}c^2\,c12j\,ci\,prod - \frac{1}{8}c12^2\,c12j\,ci\,prod - \\
& \frac{1}{2}c^2\,c12i\,cj\,prod - \frac{1}{8}c12^2\,c12i\,cj\,prod - c^2\,ci\,cj\,prod - \frac{1}{4}c12^2\,ci\,cj\,prod + \\
& \frac{1}{4}c12i\,c12j\,d\,prod + \frac{1}{2}c12j\,ci\,d\,prod + \frac{1}{2}c12i\,cj\,d\,prod + ci\,cj\,d\,prod + \\
& \frac{1}{8}c12i\,c12j\,d^2\,prod + \frac{1}{4}c12j\,ci\,d^2\,prod + \frac{1}{4}c12i\,cj\,d^2\,prod + \frac{1}{2}ci\,cj\,d^2\,prod - \\
& \frac{deltaij\,prod}{2} - \frac{1}{2}c^2\,deltaij\,prod - \frac{1}{8}c12^2\,deltaij\,prod + \frac{c^2\,deltaij\,prod}{d} + \\
& \frac{c^4\,deltaij\,prod}{2\,d} + \frac{c12^2\,deltaij\,prod}{4\,d} + \frac{c^2\,c12^2\,deltaij\,prod}{4\,d} + \frac{c12^4\,deltaij\,prod}{32\,d} - \\
& \frac{d\,deltaij\,prod}{4} - \frac{1}{2}c^2\,d\,deltaij\,prod - \frac{1}{8}c12^2\,d\,deltaij\,prod + \frac{1}{8}c12i\,c12j\,prod^2 + \\
& \frac{1}{4}c12j\,ci\,prod^2 + \frac{1}{4}c12i\,cj\,prod^2 + \frac{1}{2}ci\,cj\,prod^2 - deltaij\,prod^2 + \\
& \frac{c^2\,deltaij\,prod^2}{2\,d} + \frac{c12^2\,deltaij\,prod^2}{8\,d} - \frac{1}{2}d\,deltaij\,prod^2 - \frac{deltaij\,prod^3}{2\,d}\Big) \\
= {} & 0 \qquad (19)
\end{aligned}
$$

A nouveau, on constate que $K_1^{cq} + K_1^{c_{12}q} = K_1$, et aussi $K^{cq} + K^{c_{12}q} = K$.

$$K_1^{c_{eq}} = -\frac{\mathrm{c12i}}{2} + \frac{c^2\,\mathrm{c12i}}{2} + \frac{\mathrm{c12}^2\,\mathrm{c12i}}{8} - \mathrm{ci} + c^2\,\mathrm{ci} + \frac{\mathrm{c12}^2\,\mathrm{ci}}{4} - \frac{\mathrm{c12i}\,d}{4} - \frac{\mathrm{ci}\,d}{2} + \frac{\mathrm{c12i}\,\mathrm{prod}}{2} + \mathrm{ci}\,\mathrm{prod} +$$
$$\mathrm{a2}\left(\frac{c^2\,\mathrm{c12i}}{2} - \frac{3c^4\,\mathrm{c12i}}{4} + \frac{c^6\,\mathrm{c12i}}{4} + \frac{\mathrm{c12}^2\,\mathrm{c12i}}{8} - \frac{3}{8}c^2\,\mathrm{c12}^2\,\mathrm{c12i} + \frac{3}{16}c^4\,\mathrm{c12}^2\,\mathrm{c12i} - \right.$$
$$\frac{3\,\mathrm{c12}^4\,\mathrm{c12i}}{64} + \frac{3}{64}c^2\,\mathrm{c12}^4\,\mathrm{c12i} + \frac{\mathrm{c12}^6\,\mathrm{c12i}}{256} + c^2\,\mathrm{ci} - \frac{3c^4\,\mathrm{ci}}{2} + \frac{c^6\,\mathrm{ci}}{2} + \frac{\mathrm{c12}^2\,\mathrm{ci}}{4} -$$
$$\frac{3}{4}c^2\,\mathrm{c12}^2\,\mathrm{ci} + \frac{3}{8}c^4\,\mathrm{c12}^2\,\mathrm{ci} - \frac{3\,\mathrm{c12}^4\,\mathrm{ci}}{32} + \frac{3}{32}c^2\,\mathrm{c12}^4\,\mathrm{ci} + \frac{\mathrm{c12}^6\,\mathrm{ci}}{128} - \frac{\mathrm{c12i}\,d}{4} +$$
$$\frac{3}{4}c^2\,\mathrm{c12i}\,d - \frac{3}{8}c^4\,\mathrm{c12i}\,d + \frac{3}{16}\mathrm{c12}^2\,\mathrm{c12i}\,d - \frac{3}{16}c^2\,\mathrm{c12}^2\,\mathrm{c12i}\,d - \frac{3}{128}\mathrm{c12}^4\,\mathrm{c12i}\,d -$$
$$\frac{\mathrm{ci}\,d}{2} + \frac{3}{2}c^2\,\mathrm{ci}\,d - \frac{3}{4}c^4\,\mathrm{ci}\,d + \frac{3}{8}\mathrm{c12}^2\,\mathrm{ci}\,d - \frac{3}{8}c^2\,\mathrm{c12}^2\,\mathrm{ci}\,d - \frac{3}{64}\mathrm{c12}^4\,\mathrm{ci}\,d -$$
$$\frac{\mathrm{c12i}\,d^2}{4} + \frac{1}{4}c^2\,\mathrm{c12i}\,d^2 + \frac{1}{16}\mathrm{c12}^2\,\mathrm{c12i}\,d^2 - \frac{\mathrm{ci}\,d^2}{2} + \frac{1}{2}c^2\,\mathrm{ci}\,d^2 + \frac{1}{8}\mathrm{c12}^2\,\mathrm{ci}\,d^2 -$$
$$\frac{\mathrm{c12i}\,d^3}{16} - \frac{\mathrm{ci}\,d^3}{8} - \frac{1}{4}c^4\,\mathrm{c12i}\,\mathrm{prod} - \frac{1}{8}c^2\,\mathrm{c12}^2\,\mathrm{c12i}\,\mathrm{prod} - \frac{1}{64}\mathrm{c12}^4\,\mathrm{c12i}\,\mathrm{prod} -$$
$$\frac{1}{2}c^4\,\mathrm{ci}\,\mathrm{prod} - \frac{1}{4}c^2\,\mathrm{c12}^2\,\mathrm{ci}\,\mathrm{prod} - \frac{1}{32}\mathrm{c12}^4\,\mathrm{ci}\,\mathrm{prod} - \frac{\mathrm{c12i}\,d\,\mathrm{prod}}{4} + \frac{1}{2}c^2\,\mathrm{c12i}\,d\,\mathrm{prod} +$$
$$\frac{1}{8}\mathrm{c12}^2\,\mathrm{c12i}\,d\,\mathrm{prod} - \frac{\mathrm{ci}\,d\,\mathrm{prod}}{2} + c^2\,\mathrm{ci}\,d\,\mathrm{prod} + \frac{1}{4}\mathrm{c12}^2\,\mathrm{ci}\,d\,\mathrm{prod} - \frac{3}{8}\mathrm{c12i}\,d^2\,\mathrm{prod} +$$
$$\frac{1}{4}c^2\,\mathrm{c12i}\,d^2\,\mathrm{prod} + \frac{1}{16}\mathrm{c12}^2\,\mathrm{c12i}\,d^2\,\mathrm{prod} - \frac{3}{4}\mathrm{ci}\,d^2\,\mathrm{prod} + \frac{1}{2}c^2\,\mathrm{ci}\,d^2\,\mathrm{prod} +$$
$$\frac{1}{8}\mathrm{c12}^2\,\mathrm{ci}\,d^2\,\mathrm{prod} - \frac{1}{8}\mathrm{c12i}\,d^3\,\mathrm{prod} - \frac{1}{4}\mathrm{ci}\,d^3\,\mathrm{prod} - \frac{\mathrm{c12i}\,\mathrm{prod}^2}{4} - \frac{1}{4}c^2\,\mathrm{c12i}\,\mathrm{prod}^2 -$$
$$\frac{1}{16}\mathrm{c12}^2\,\mathrm{c12i}\,\mathrm{prod}^2 - \frac{\mathrm{ci}\,\mathrm{prod}^2}{2} - \frac{1}{2}c^2\,\mathrm{ci}\,\mathrm{prod}^2 - \frac{1}{8}\mathrm{c12}^2\,\mathrm{ci}\,\mathrm{prod}^2 + \frac{3}{8}\mathrm{c12i}\,d\,\mathrm{prod}^2 +$$
$$\left.\frac{3}{4}\mathrm{ci}\,d\,\mathrm{prod}^2 + \frac{1}{4}\mathrm{c12i}\,d^2\,\mathrm{prod}^2 + \frac{1}{2}\mathrm{ci}\,d^2\,\mathrm{prod}^2 + \frac{\mathrm{c12i}\,\mathrm{prod}^3}{4} + \frac{\mathrm{ci}\,\mathrm{prod}^3}{2}\right) \qquad (18)$$

$$
\begin{aligned}
K_2^q = {} & \frac{\mathrm{c12i\ c12j}}{4} + \frac{\mathrm{c12j\ ci}}{2} + \frac{\mathrm{c12i\ cj}}{2} + \mathrm{ci\ cj} - \frac{\mathrm{c}^2\ \mathrm{deltaij}}{\mathrm{d}} - \frac{\mathrm{c12}^2\ \mathrm{deltaij}}{4\ \mathrm{d}} - \\
& \frac{\mathrm{deltaij\ prod}}{\mathrm{d}} + \mathrm{a2}\Big(-\frac{1}{4}\mathrm{c}^2\ \mathrm{c12i\ c12j} + \frac{1}{8}\mathrm{c}^4\ \mathrm{c12i\ c12j} - \frac{1}{16}\mathrm{c12}^2\ \mathrm{c12i\ c12j} + \\
& \frac{1}{16}\mathrm{c}^2\ \mathrm{c12}^2\ \mathrm{c12i\ c12j} + \frac{1}{128}\mathrm{c12}^4\ \mathrm{c12i\ c12j} - \frac{1}{2}\mathrm{c}^2\ \mathrm{c12j\ ci} + \frac{1}{4}\mathrm{c}^4\ \mathrm{c12j\ ci} - \\
& \frac{1}{8}\mathrm{c12}^2\ \mathrm{c12j\ ci} + \frac{1}{8}\mathrm{c}^2\ \mathrm{c12}^2\ \mathrm{c12j\ ci} + \frac{1}{64}\mathrm{c12}^4\ \mathrm{c12j\ ci} - \frac{1}{2}\mathrm{c}^2\ \mathrm{c12i\ cj} + \\
& \frac{1}{4}\mathrm{c}^4\ \mathrm{c12i\ cj} - \frac{1}{8}\mathrm{c12}^2\ \mathrm{c12i\ cj} + \frac{1}{8}\mathrm{c}^2\ \mathrm{c12}^2\ \mathrm{c12i\ cj} + \frac{1}{64}\mathrm{c12}^4\ \mathrm{c12i\ cj} - \mathrm{c}^2\ \mathrm{ci\ cj} + \\
& \frac{1}{2}\mathrm{c}^4\ \mathrm{ci\ cj} - \frac{1}{4}\mathrm{c12}^2\ \mathrm{ci\ cj} + \frac{1}{4}\mathrm{c}^2\ \mathrm{c12}^2\ \mathrm{ci\ cj} + \frac{1}{32}\mathrm{c12}^4\ \mathrm{ci\ cj} + \frac{\mathrm{c12i\ c12j\ d}}{8} - \\
& \frac{1}{8}\mathrm{c}^2\ \mathrm{c12i\ c12j\ d} - \frac{1}{32}\mathrm{c12}^2\ \mathrm{c12i\ c12j\ d} + \frac{\mathrm{c12j\ ci\ d}}{4} - \frac{1}{4}\mathrm{c}^2\ \mathrm{c12j\ ci\ d} - \\
& \frac{1}{16}\mathrm{c12}^2\ \mathrm{c12j\ ci\ d} + \frac{\mathrm{c12i\ cj\ d}}{4} - \frac{1}{4}\mathrm{c}^2\ \mathrm{c12i\ cj\ d} - \frac{1}{16}\mathrm{c12}^2\ \mathrm{c12i\ cj\ d} + \\
& \frac{\mathrm{ci\ cj\ d}}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{c}^2\ \mathrm{ci\ cj\ d} - \frac{1}{8}\mathrm{c12}^2\ \mathrm{ci\ cj\ d} + \frac{1}{16}\mathrm{c12i\ c12j\ d}^2 + \frac{1}{8}\mathrm{c12j\ ci\ d}^2 + \\
& \frac{1}{8}\mathrm{c12i\ cj\ d}^2 + \frac{1}{4}\mathrm{ci\ cj\ d}^2 - \frac{\mathrm{c}^2\ \mathrm{deltaij}}{2} + \frac{\mathrm{c}^4\ \mathrm{deltaij}}{2} - \frac{\mathrm{c12}^2\ \mathrm{deltaij}}{8} + \\
& \frac{1}{4}\mathrm{c}^2\ \mathrm{c12}^2\ \mathrm{deltaij} + \frac{\mathrm{c12}^4\ \mathrm{deltaij}}{32} + \frac{\mathrm{c}^4\ \mathrm{deltaij}}{\mathrm{d}} - \frac{\mathrm{c}^6\ \mathrm{deltaij}}{2\ \mathrm{d}} + \\
& \frac{\mathrm{c}^2\ \mathrm{c12}^2\ \mathrm{deltaij}}{2\ \mathrm{d}} - \frac{3\ \mathrm{c}^4\ \mathrm{c12}^2\ \mathrm{deltaij}}{8\ \mathrm{d}} + \frac{\mathrm{c12}^4\ \mathrm{deltaij}}{16\ \mathrm{d}} - \frac{3\ \mathrm{c}^2\ \mathrm{c12}^4\ \mathrm{deltaij}}{32\ \mathrm{d}} - \\
& \frac{\mathrm{c12}^6\ \mathrm{deltaij}}{128\ \mathrm{d}} - \frac{1}{4}\mathrm{c}^2\ \mathrm{d\ deltaij} - \frac{1}{16}\mathrm{c12}^2\ \mathrm{d\ deltaij} - \frac{1}{4}\mathrm{c}^2\ \mathrm{c12i\ c12j\ prod} - \\
& \frac{1}{16}\mathrm{c12}^2\ \mathrm{c12i\ c12j\ prod} - \frac{1}{2}\mathrm{c}^2\ \mathrm{c12j\ ci\ prod} - \frac{1}{8}\mathrm{c12}^2\ \mathrm{c12j\ ci\ prod} - \\
& \frac{1}{2}\mathrm{c}^2\ \mathrm{c12i\ cj\ prod} - \frac{1}{8}\mathrm{c12}^2\ \mathrm{c12i\ cj\ prod} - \mathrm{c}^2\ \mathrm{ci\ cj\ prod} - \frac{1}{4}\mathrm{c12}^2\ \mathrm{ci\ cj\ prod} + \\
& \frac{1}{4}\mathrm{c12i\ c12j\ d\ prod} + \frac{1}{2}\mathrm{c12j\ ci\ d\ prod} + \frac{1}{2}\mathrm{c12i\ cj\ d\ prod} + \mathrm{ci\ cj\ d\ prod} + \\
& \frac{1}{8}\mathrm{c12i\ c12j\ d}^2\ \mathrm{prod} + \frac{1}{4}\mathrm{c12j\ ci\ d}^2\ \mathrm{prod} + \frac{1}{4}\mathrm{c12i\ cj\ d}^2\ \mathrm{prod} + \frac{1}{2}\mathrm{ci\ cj\ d}^2\ \mathrm{prod} - \\
& \frac{\mathrm{deltaij\ prod}}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{c}^2\ \mathrm{deltaij\ prod} - \frac{1}{8}\mathrm{c12}^2\ \mathrm{deltaij\ prod} + \frac{\mathrm{c}^2\ \mathrm{deltaij\ prod}}{\mathrm{d}} + \\
& \frac{\mathrm{c}^4\ \mathrm{deltaij\ prod}}{2\ \mathrm{d}} + \frac{\mathrm{c12}^2\ \mathrm{deltaij\ prod}}{4\ \mathrm{d}} + \frac{\mathrm{c}^2\ \mathrm{c12}^2\ \mathrm{deltaij\ prod}}{4\ \mathrm{d}} + \frac{\mathrm{c12}^4\ \mathrm{deltaij\ prod}}{32\ \mathrm{d}} - \\
& \frac{\mathrm{d\ deltaij\ prod}}{4} - \frac{1}{2}\mathrm{c}^2\ \mathrm{d\ deltaij\ prod} - \frac{1}{8}\mathrm{c12}^2\ \mathrm{d\ deltaij\ prod} + \frac{1}{8}\mathrm{c12i\ c12j\ prod}^2 + \\
& \frac{1}{4}\mathrm{c12j\ ci\ prod}^2 + \frac{1}{4}\mathrm{c12i\ cj\ prod}^2 + \frac{1}{2}\mathrm{ci\ cj\ prod}^2 - \mathrm{deltaij\ prod}^2 + \\
& \frac{\mathrm{c}^2\ \mathrm{deltaij\ prod}^2}{2\ \mathrm{d}} + \frac{\mathrm{c12}^2\ \mathrm{deltaij\ prod}^2}{8\ \mathrm{d}} - \frac{1}{2}\mathrm{d\ deltaij\ prod}^2 - \frac{\mathrm{deltaij\ prod}^3}{2\ \mathrm{d}}\Big) \\
= {} & 0 \qquad (17)
\end{aligned}
$$

La nullité de K_2 s'explique par le fait que dans chaque moment apparaît soit un moment $c_i c_{12j}$, soit un moment $(c.c_{12})^p$ (cf. Eq. (71)). Donc si on multiplie ces moments par c_q ou c_{12q}, les contributions seront toutes nulles.

$$
\begin{aligned}
K_1^{q} = {} & -\frac{\mathrm{c12i}}{2} + \frac{c^2\,\mathrm{c12i}}{2} + \frac{\mathrm{c12}^2\,\mathrm{c12i}}{8} - \mathrm{ci} + c^2\,\mathrm{ci} + \\
& \frac{\mathrm{c12}^2\,\mathrm{ci}}{4} - \frac{\mathrm{c12i}\,d}{4} - \frac{\mathrm{ci}\,d}{2} + \frac{\mathrm{c12i}\,\mathrm{prod}}{2} + \mathrm{ci}\,\mathrm{prod} + \\
& \mathrm{a2}\left(\frac{c^2\,\mathrm{c12i}}{2} - \frac{3\,c^4\,\mathrm{c12i}}{4} + \frac{c^6\,\mathrm{c12i}}{4} + \frac{\mathrm{c12}^2\,\mathrm{c12i}}{8} - \frac{3}{8}\,c^2\,\mathrm{c12}^2\,\mathrm{c12i} + \frac{3}{16}\,c^4\,\mathrm{c12}^2\,\mathrm{c12i} - \right. \\
& \frac{3\,\mathrm{c12}^4\,\mathrm{c12i}}{64} + \frac{3}{64}\,c^2\,\mathrm{c12}^4\,\mathrm{c12i} + \frac{\mathrm{c12}^6\,\mathrm{c12i}}{256} + c^2\,\mathrm{ci} - \frac{3\,c^4\,\mathrm{ci}}{2} + \frac{c^6\,\mathrm{ci}}{2} + \frac{\mathrm{c12}^2\,\mathrm{ci}}{4} - \\
& \frac{3}{4}\,c^2\,\mathrm{c12}^2\,\mathrm{ci} + \frac{3}{8}\,c^4\,\mathrm{c12}^2\,\mathrm{ci} - \frac{3\,\mathrm{c12}^4\,\mathrm{ci}}{32} + \frac{3}{32}\,c^2\,\mathrm{c12}^4\,\mathrm{ci} + \frac{\mathrm{c12}^6\,\mathrm{ci}}{128} - \frac{\mathrm{c12i}\,d}{4} + \\
& \frac{3}{4}\,c^2\,\mathrm{c12i}\,d - \frac{3}{8}\,c^4\,\mathrm{c12i}\,d + \frac{3}{16}\,\mathrm{c12}^2\,\mathrm{c12i}\,d - \frac{3}{16}\,c^2\,\mathrm{c12}^2\,\mathrm{c12i}\,d - \frac{3}{128}\,\mathrm{c12}^4\,\mathrm{c12i}\,d - \\
& \frac{\mathrm{ci}\,d}{2} + \frac{3}{2}\,c^2\,\mathrm{ci}\,d - \frac{3}{4}\,c^4\,\mathrm{ci}\,d + \frac{3}{8}\,\mathrm{c12}^2\,\mathrm{ci}\,d - \frac{3}{8}\,c^2\,\mathrm{c12}^2\,\mathrm{ci}\,d - \frac{3}{64}\,\mathrm{c12}^4\,\mathrm{ci}\,d - \\
& \frac{\mathrm{c12i}\,d^2}{4} + \frac{1}{4}\,c^2\,\mathrm{c12i}\,d^2 + \frac{1}{16}\,\mathrm{c12}^2\,\mathrm{c12i}\,d^2 - \frac{\mathrm{ci}\,d^2}{2} + \frac{1}{2}\,c^2\,\mathrm{ci}\,d^2 + \frac{1}{8}\,\mathrm{c12}^2\,\mathrm{ci}\,d^2 - \\
& \frac{\mathrm{c12i}\,d^3}{16} - \frac{\mathrm{ci}\,d^3}{8} - \frac{1}{4}\,c^4\,\mathrm{c12i}\,\mathrm{prod} - \frac{1}{8}\,c^2\,\mathrm{c12}^2\,\mathrm{c12i}\,\mathrm{prod} - \frac{1}{64}\,\mathrm{c12}^4\,\mathrm{c12i}\,\mathrm{prod} - \\
& \frac{1}{2}\,c^4\,\mathrm{ci}\,\mathrm{prod} - \frac{1}{4}\,c^2\,\mathrm{c12}^2\,\mathrm{ci}\,\mathrm{prod} - \frac{1}{32}\,\mathrm{c12}^4\,\mathrm{ci}\,\mathrm{prod} - \frac{\mathrm{c12i}\,d\,\mathrm{prod}}{4} + \frac{1}{2}\,c^2\,\mathrm{c12i}\,d\,\mathrm{prod} + \\
& \frac{1}{8}\,\mathrm{c12}^2\,\mathrm{c12i}\,d\,\mathrm{prod} - \frac{\mathrm{ci}\,d\,\mathrm{prod}}{2} + c^2\,\mathrm{ci}\,d\,\mathrm{prod} + \frac{1}{4}\,\mathrm{c12}^2\,\mathrm{ci}\,d\,\mathrm{prod} - \frac{3}{8}\,\mathrm{c12i}\,d^2\,\mathrm{prod} + \\
& \frac{1}{4}\,c^2\,\mathrm{c12i}\,d^2\,\mathrm{prod} + \frac{1}{16}\,\mathrm{c12}^2\,\mathrm{c12i}\,d^2\,\mathrm{prod} - \frac{3}{4}\,\mathrm{ci}\,d^2\,\mathrm{prod} + \frac{1}{2}\,c^2\,\mathrm{ci}\,d^2\,\mathrm{prod} + \\
& \frac{1}{8}\,\mathrm{c12}^2\,\mathrm{ci}\,d^2\,\mathrm{prod} - \frac{1}{8}\,\mathrm{c12i}\,d^3\,\mathrm{prod} - \frac{1}{4}\,\mathrm{ci}\,d^3\,\mathrm{prod} - \frac{\mathrm{c12i}\,\mathrm{prod}^2}{4} - \frac{1}{4}\,c^2\,\mathrm{c12i}\,\mathrm{prod}^2 - \\
& \frac{1}{16}\,\mathrm{c12}^2\,\mathrm{c12i}\,\mathrm{prod}^2 - \frac{\mathrm{ci}\,\mathrm{prod}^2}{2} - \frac{1}{2}\,c^2\,\mathrm{ci}\,\mathrm{prod}^2 - \frac{1}{8}\,\mathrm{c12}^2\,\mathrm{ci}\,\mathrm{prod}^2 + \frac{3}{8}\,\mathrm{c12i}\,d\,\mathrm{prod}^2 + \\
& \left. \frac{3}{4}\,\mathrm{ci}\,d\,\mathrm{prod}^2 + \frac{1}{4}\,\mathrm{c12i}\,d^2\,\mathrm{prod}^2 + \frac{1}{2}\,\mathrm{ci}\,d^2\,\mathrm{prod}^2 + \frac{\mathrm{c12i}\,\mathrm{prod}^3}{4} + \frac{\mathrm{ci}\,\mathrm{prod}^3}{2}\right) \qquad (16)
\end{aligned}
$$

√

$$
\begin{aligned}
K_1^{(c,c_1)} = {} & -\frac{\mathrm{c12i}}{2} + \frac{\mathrm{c}^2\,\mathrm{c12i}}{2} + \frac{\mathrm{c12}^2\,\mathrm{c12i}}{8} - \mathrm{ci} + \mathrm{c}^2\,\mathrm{ci} + \\
& \frac{\mathrm{c12}^2\,\mathrm{ci}}{4} - \frac{\mathrm{c12i}\,\mathrm{d}}{4} - \frac{\mathrm{ci}\,\mathrm{d}}{2} + \frac{\mathrm{c12i}\,\mathrm{prod}}{2} + \mathrm{ci}\,\mathrm{prod} + \\
& \mathrm{a2}\Bigg(\frac{\mathrm{c}^2\,\mathrm{c12i}}{2} - \frac{3\,\mathrm{c}^4\,\mathrm{c12i}}{4} + \frac{\mathrm{c}^6\,\mathrm{c12i}}{4} + \frac{\mathrm{c12}^2\,\mathrm{c12i}}{8} - \frac{3}{8}\,\mathrm{c}^2\,\mathrm{c12}^2\,\mathrm{c12i} + \frac{3}{16}\,\mathrm{c}^4\,\mathrm{c12}^2\,\mathrm{c12i} - \\
& \frac{3\,\mathrm{c12}^4\,\mathrm{c12i}}{64} + \frac{3}{64}\,\mathrm{c}^2\,\mathrm{c12}^4\,\mathrm{c12i} + \frac{\mathrm{c12}^6\,\mathrm{c12i}}{256} + \mathrm{c}^2\,\mathrm{ci} - \frac{3\,\mathrm{c}^4\,\mathrm{ci}}{2} + \frac{\mathrm{c}^6\,\mathrm{ci}}{2} + \frac{\mathrm{c12}^2\,\mathrm{ci}}{4} - \\
& \frac{3}{4}\,\mathrm{c}^2\,\mathrm{c12}^2\,\mathrm{ci} + \frac{3}{8}\,\mathrm{c}^4\,\mathrm{c12}^2\,\mathrm{ci} - \frac{3\,\mathrm{c12}^4\,\mathrm{ci}}{32} + \frac{3}{32}\,\mathrm{c}^2\,\mathrm{c12}^4\,\mathrm{ci} + \frac{\mathrm{c12}^6\,\mathrm{ci}}{128} - \frac{\mathrm{c12i}\,\mathrm{d}}{4} + \\
& \frac{3}{4}\,\mathrm{c}^2\,\mathrm{c12i}\,\mathrm{d} - \frac{3}{8}\,\mathrm{c}^4\,\mathrm{c12i}\,\mathrm{d} + \frac{3}{16}\,\mathrm{c12}^2\,\mathrm{c12i}\,\mathrm{d} - \frac{3}{16}\,\mathrm{c}^2\,\mathrm{c12}^2\,\mathrm{c12i}\,\mathrm{d} - \frac{3}{128}\,\mathrm{c12}^4\,\mathrm{c12i}\,\mathrm{d} - \\
& \frac{\mathrm{ci}\,\mathrm{d}}{2} + \frac{3}{2}\,\mathrm{c}^2\,\mathrm{ci}\,\mathrm{d} - \frac{3}{4}\,\mathrm{c}^4\,\mathrm{ci}\,\mathrm{d} + \frac{3}{8}\,\mathrm{c12}^2\,\mathrm{ci}\,\mathrm{d} - \frac{3}{8}\,\mathrm{c}^2\,\mathrm{c12}^2\,\mathrm{ci}\,\mathrm{d} - \frac{3}{64}\,\mathrm{c12}^4\,\mathrm{ci}\,\mathrm{d} - \\
& \frac{\mathrm{c12i}\,\mathrm{d}^2}{4} + \frac{1}{4}\,\mathrm{c}^2\,\mathrm{c12i}\,\mathrm{d}^2 + \frac{1}{16}\,\mathrm{c12}^2\,\mathrm{c12i}\,\mathrm{d}^2 - \frac{\mathrm{ci}\,\mathrm{d}^2}{2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{c}^2\,\mathrm{ci}\,\mathrm{d}^2 + \frac{1}{8}\,\mathrm{c12}^2\,\mathrm{ci}\,\mathrm{d}^2 - \\
& \frac{\mathrm{c12i}\,\mathrm{d}^3}{16} - \frac{\mathrm{ci}\,\mathrm{d}^3}{8} - \frac{1}{4}\,\mathrm{c}^4\,\mathrm{c12i}\,\mathrm{prod} - \frac{1}{8}\,\mathrm{c}^2\,\mathrm{c12}^2\,\mathrm{c12i}\,\mathrm{prod} - \frac{1}{64}\,\mathrm{c12}^4\,\mathrm{c12i}\,\mathrm{prod} - \\
& \frac{1}{2}\,\mathrm{c}^4\,\mathrm{ci}\,\mathrm{prod} - \frac{1}{4}\,\mathrm{c}^2\,\mathrm{c12}^2\,\mathrm{ci}\,\mathrm{prod} - \frac{1}{32}\,\mathrm{c12}^4\,\mathrm{ci}\,\mathrm{prod} - \frac{\mathrm{c12i}\,\mathrm{d}\,\mathrm{prod}}{4} + \frac{1}{2}\,\mathrm{c}^2\,\mathrm{c12i}\,\mathrm{d}\,\mathrm{prod} + \\
& \frac{1}{8}\,\mathrm{c12}^2\,\mathrm{c12i}\,\mathrm{d}\,\mathrm{prod} - \frac{\mathrm{ci}\,\mathrm{d}\,\mathrm{prod}}{2} + \mathrm{c}^2\,\mathrm{ci}\,\mathrm{d}\,\mathrm{prod} + \frac{1}{4}\,\mathrm{c12}^2\,\mathrm{ci}\,\mathrm{d}\,\mathrm{prod} - \frac{3}{8}\,\mathrm{c12i}\,\mathrm{d}^2\,\mathrm{prod} + \\
& \frac{1}{4}\,\mathrm{c}^2\,\mathrm{c12i}\,\mathrm{d}^2\,\mathrm{prod} + \frac{1}{16}\,\mathrm{c12}^2\,\mathrm{c12i}\,\mathrm{d}^2\,\mathrm{prod} - \frac{3}{4}\,\mathrm{ci}\,\mathrm{d}^2\,\mathrm{prod} + \frac{1}{2}\,\mathrm{c}^2\,\mathrm{ci}\,\mathrm{d}^2\,\mathrm{prod} + \\
& \frac{1}{8}\,\mathrm{c12}^2\,\mathrm{ci}\,\mathrm{d}^2\,\mathrm{prod} - \frac{1}{8}\,\mathrm{c12i}\,\mathrm{d}^3\,\mathrm{prod} - \frac{1}{4}\,\mathrm{ci}\,\mathrm{d}^3\,\mathrm{prod} - \frac{\mathrm{c12i}\,\mathrm{prod}^2}{4} - \frac{1}{4}\,\mathrm{c}^2\,\mathrm{c12i}\,\mathrm{prod}^2 - \\
& \frac{1}{16}\,\mathrm{c12}^2\,\mathrm{c12i}\,\mathrm{prod}^2 - \frac{\mathrm{ci}\,\mathrm{prod}^2}{2} - \frac{1}{2}\,\mathrm{c}^2\,\mathrm{ci}\,\mathrm{prod}^2 - \frac{1}{8}\,\mathrm{c12}^2\,\mathrm{ci}\,\mathrm{prod}^2 + \frac{3}{8}\,\mathrm{c12i}\,\mathrm{d}\,\mathrm{prod}^2 + \\
& \frac{3}{4}\,\mathrm{ci}\,\mathrm{d}\,\mathrm{prod}^2 + \frac{1}{4}\,\mathrm{c12i}\,\mathrm{d}^2\,\mathrm{prod}^2 + \frac{1}{2}\,\mathrm{ci}\,\mathrm{d}^2\,\mathrm{prod}^2 + \frac{\mathrm{c12i}\,\mathrm{prod}^3}{4} + \frac{\mathrm{ci}\,\mathrm{prod}^3}{2}\Bigg) \\
= {} & 0, \qquad (14)
\end{aligned}
$$

pour les mêmes raisons que $K_1^{c^2,c_{12}^2}$.

$$
\begin{aligned}
K_2^{(c.c_{12})} = {} & \frac{c12i\,c12j}{4} + \frac{c12j\,ci}{2} + \frac{c12i\,cj}{2} + ci\,cj - \frac{c^2\,deltaij}{d} - \frac{c12^2\,deltaij}{4\,d} - \\
& \frac{deltaij\,prod}{d} + a2\Big(-\frac{1}{4}c^2\,c12i\,c12j + \frac{1}{8}c^4\,c12i\,c12j - \frac{1}{16}c12^2\,c12i\,c12j + \\
& \frac{1}{16}c^2\,c12^2\,c12i\,c12j + \frac{1}{128}c12^4\,c12i\,c12j - \frac{1}{2}c^2\,c12j\,ci + \frac{1}{4}c^4\,c12j\,ci - \\
& \frac{1}{8}c12^2\,c12j\,ci + \frac{1}{8}c^2\,c12^2\,c12j\,ci + \frac{1}{64}c12^4\,c12j\,ci - \frac{1}{2}c^2\,c12i\,cj + \\
& \frac{1}{4}c^4\,c12i\,cj - \frac{1}{8}c12^2\,c12i\,cj + \frac{1}{8}c^2\,c12^2\,c12i\,cj + \frac{1}{64}c12^4\,c12i\,cj - c^2\,ci\,cj + \\
& \frac{1}{2}c^4\,ci\,cj - \frac{1}{4}c12^2\,ci\,cj + \frac{1}{4}c^2\,c12^2\,ci\,cj + \frac{1}{32}c12^4\,ci\,cj + \frac{c12i\,c12j\,d}{8} - \\
& \frac{1}{8}c^2\,c12i\,c12j\,d - \frac{1}{32}c12^2\,c12i\,c12j\,d + \frac{c12j\,ci\,d}{4} - \frac{1}{4}c^2\,c12j\,ci\,d - \\
& \frac{1}{16}c12^2\,c12j\,ci\,d + \frac{c12i\,cj\,d}{4} - \frac{1}{4}c^2\,c12i\,cj\,d - \frac{1}{16}c12^2\,c12i\,cj\,d + \\
& \frac{ci\,cj\,d}{2} - \frac{1}{2}c^2\,ci\,cj\,d - \frac{1}{8}c12^2\,ci\,cj\,d + \frac{1}{16}c12i\,c12j\,d^2 + \frac{1}{8}c12j\,ci\,d^2 + \\
& \frac{1}{8}c12i\,cj\,d^2 + \frac{1}{4}ci\,cj\,d^2 - \frac{c^2\,deltaij}{2} + \frac{c^4\,deltaij}{2} - \frac{c12^2\,deltaij}{8} + \\
& \frac{1}{4}c^2\,c12^2\,deltaij + \frac{c12^4\,deltaij}{32} + \frac{c^4\,deltaij}{d} - \frac{c^6\,deltaij}{2\,d} + \\
& \frac{c^2\,c12^2\,deltaij}{2\,d} - \frac{3\,c^4\,c12^2\,deltaij}{8\,d} + \frac{c12^4\,deltaij}{16\,d} - \frac{3\,c^2\,c12^4\,deltaij}{32\,d} - \\
& \frac{c12^6\,deltaij}{128\,d} - \frac{1}{4}c^2\,d\,deltaij - \frac{1}{16}c12^2\,d\,deltaij - \frac{1}{4}c^2\,c12i\,c12j\,prod - \\
& \frac{1}{16}c12^2\,c12i\,c12j\,prod - \frac{1}{2}c^2\,c12j\,ci\,prod - \frac{1}{8}c12^2\,c12j\,ci\,prod - \\
& \frac{1}{2}c^2\,c12i\,cj\,prod - \frac{1}{8}c12^2\,c12i\,cj\,prod - c^2\,ci\,cj\,prod - \frac{1}{4}c12^2\,ci\,cj\,prod + \\
& \frac{1}{4}c12i\,c12j\,d\,prod + \frac{1}{2}c12j\,ci\,d\,prod + \frac{1}{2}c12i\,cj\,d\,prod + ci\,cj\,d\,prod + \\
& \frac{1}{8}c12i\,c12j\,d^2\,prod + \frac{1}{4}c12j\,ci\,d^2\,prod + \frac{1}{4}c12i\,cj\,d^2\,prod + \frac{1}{2}ci\,cj\,d^2\,prod - \\
& \frac{deltaij\,prod}{2} - \frac{1}{2}c^2\,deltaij\,prod - \frac{1}{8}c12^2\,deltaij\,prod + \frac{c^2\,deltaij\,prod}{d} + \\
& \frac{c^4\,deltaij\,prod}{2\,d} + \frac{c12^2\,deltaij\,prod}{4\,d} + \frac{c^2\,c12^2\,deltaij\,prod}{4\,d} + \frac{c12^4\,deltaij\,prod}{32\,d} - \\
& \frac{d\,deltaij\,prod}{4} - \frac{1}{2}c^2\,d\,deltaij\,prod - \frac{1}{8}c12^2\,d\,deltaij\,prod + \frac{1}{8}c12i\,c12j\,prod^2 + \\
& \frac{1}{4}c12j\,ci\,prod^2 + \frac{1}{4}c12i\,cj\,prod^2 + \frac{1}{2}ci\,cj\,prod^2 - deltaij\,prod^2 + \\
& \frac{c^2\,deltaij\,prod^2}{2\,d} + \frac{c12^2\,deltaij\,prod^2}{8\,d} - \frac{1}{2}d\,deltaij\,prod^2 - \frac{deltaij\,prod^3}{2\,d}\Big) \qquad (15)
\end{aligned}
$$

On remarque qu'on a bien $K_2^{(c.c_{12})} + K_2^{c_i^2 c_{12}^2} = K_2$, donc aussi $K^{(c_1.c_2)} + K^{c_i^2 c_{12}^2} = K$.

$$K_2^{c_i^2 c_n^2} = \frac{\text{c12i c12j}}{4} + \frac{\text{c12j ci}}{2} + \frac{\text{c12i cj}}{2} + \text{ci cj} - \frac{c^2\,\text{deltaij}}{\text{d}} - \frac{\text{c12}^2\,\text{deltaij}}{4\,\text{d}} -$$

$$\frac{\text{deltaij prod}}{\text{d}} + \text{a2}\left(-\frac{1}{4}c^2\,\text{c12i c12j} + \frac{1}{8}c^4\,\text{c12i c12j} - \frac{1}{16}\text{c12}^2\,\text{c12i c12j} + \right.$$

$$+\frac{1}{16}c^2\,\text{c12}^2\,\text{c12i c12j} + \frac{1}{128}\text{c12}^4\,\text{c12i c12j} - \frac{1}{2}c^2\,\text{c12j ci} + \frac{1}{4}c^4\,\text{c12j ci} -$$

$$\frac{1}{8}\text{c12}^2\,\text{c12j ci} + \frac{1}{8}c^2\,\text{c12}^2\,\text{c12j ci} + \frac{1}{64}\text{c12}^4\,\text{c12j ci} - \frac{1}{2}c^2\,\text{c12i cj} +$$

$$\frac{1}{4}c^4\,\text{c12i cj} - \frac{1}{8}\text{c12}^2\,\text{c12i cj} + \frac{1}{8}c^2\,\text{c12}^2\,\text{c12i cj} + \frac{1}{64}\text{c12}^4\,\text{c12i cj} - c^2\,\text{ci cj} +$$

$$+\frac{1}{2}c^4\,\text{ci cj} - \frac{1}{4}\text{c12}^2\,\text{ci cj} + \frac{1}{4}c^2\,\text{c12}^2\,\text{ci cj} + \frac{1}{32}\text{c12}^4\,\text{ci cj} + \frac{\text{c12i c12j d}}{8} -$$

$$-\frac{1}{8}c^2\,\text{c12i c12j d} - \frac{1}{32}\text{c12}^2\,\text{c12i c12j d} + \frac{\text{c12j ci d}}{4} - \frac{1}{4}c^2\,\text{c12j ci d} -$$

$$\frac{1}{16}\text{c12}^2\,\text{c12j ci d} + \frac{\text{c12i cj d}}{4} - \frac{1}{4}c^2\,\text{c12i cj d} - \frac{1}{16}\text{c12}^2\,\text{c12i cj d} +$$

$$+\frac{\text{ci cj d}}{2} - \frac{1}{2}c^2\,\text{ci cj d} - \frac{1}{8}\text{c12}^2\,\text{ci cj d} + \frac{1}{16}\text{c12i c12j d}^2 + \frac{1}{8}\text{c12j ci d}^2 +$$

$$\frac{1}{8}\text{c12i cj d}^2 + \frac{1}{4}\text{ci cj d}^2 - \frac{c^2\,\text{deltaij}}{2} + \frac{c^4\,\text{deltaij}}{2} - \frac{\text{c12}^2\,\text{deltaij}}{8} +$$

$$+\frac{1}{4}c^2\,\text{c12}^2\,\text{deltaij} + \frac{\text{c12}^4\,\text{deltaij}}{32} + \frac{c^4\,\text{deltaij}}{\text{d}} - \frac{c^6\,\text{deltaij}}{2\,\text{d}} +$$

$$+\frac{c^2\,\text{c12}^2\,\text{deltaij}}{2\,\text{d}} - \frac{3\,c^4\,\text{c12}^2\,\text{deltaij}}{8\,\text{d}} + \frac{\text{c12}^4\,\text{deltaij}}{16\,\text{d}} - \frac{3\,c^2\,\text{c12}^4\,\text{deltaij}}{32\,\text{d}} -$$

$$-\frac{\text{c12}^6\,\text{deltaij}}{128\,\text{d}} - \frac{1}{4}c^2\,\text{d deltaij} - \frac{1}{16}\text{c12}^2\,\text{d deltaij} - \frac{1}{4}c^2\,\text{c12i c12j prod} -$$

$$\frac{1}{16}\text{c12}^2\,\text{c12i c12j prod} - \frac{1}{2}c^2\,\text{c12j ci prod} - \frac{1}{8}\text{c12}^2\,\text{c12j ci prod} -$$

$$-\frac{1}{2}c^2\,\text{c12i cj prod} - \frac{1}{8}\text{c12}^2\,\text{c12i cj prod} - c^2\,\text{ci cj prod} - \frac{1}{4}\text{c12}^2\,\text{ci cj prod} +$$

$$\frac{1}{4}\text{c12i c12j d prod} + \frac{1}{2}\text{c12j ci d prod} + \frac{1}{2}\text{c12i cj d prod} + \text{ci cj d prod} +$$

$$\frac{1}{8}\text{c12i c12j d}^2\,\text{prod} + \frac{1}{4}\text{c12j ci d}^2\,\text{prod} + \frac{1}{4}\text{c12i cj d}^2\,\text{prod} + \frac{1}{2}\text{ci cj d}^2\,\text{prod} -$$

$$\frac{\text{deltaij prod}}{2} - \frac{1}{2}c^2\,\text{deltaij prod} - \frac{1}{8}\text{c12}^2\,\text{deltaij prod} + \frac{c^2\,\text{deltaij prod}}{\text{d}} +$$

$$\frac{c^4\,\text{deltaij prod}}{2\,\text{d}} + \frac{\text{c12}^2\,\text{deltaij prod}}{4\,\text{d}} + \frac{c^2\,\text{c12}^2\,\text{deltaij prod}}{4\,\text{d}} + \frac{\text{c12}^4\,\text{deltaij prod}}{32\,\text{d}} -$$

$$\frac{\text{d deltaij prod}}{4} - \frac{1}{2}c^2\,\text{d deltaij prod} - \frac{1}{8}\text{c12}^2\,\text{d deltaij prod} + \frac{1}{8}\text{c12i c12j prod}^2 +$$

$$\frac{1}{4}\text{c12j ci prod}^2 + \frac{1}{4}\text{c12i cj prod}^2 + \frac{1}{2}\text{ci cj prod}^2 + \text{deltaij prod}^2 +$$

$$\left. +\frac{c^2\,\text{deltaij prod}^2}{2\,\text{d}} + \frac{\text{c12}^2\,\text{deltaij prod}^2}{8\,\text{d}} - \frac{1}{2}\text{d deltaij prod}^2 - \frac{\text{deltaij prod}^3}{2\,\text{d}}\right) \qquad (13)$$

$$
\begin{aligned}
K_1^{c_i^2 c_{12}^2} = & -\frac{\mathrm{c12i}}{2} + \frac{c^2\,\mathrm{c12i}}{2} + \frac{\mathrm{c12}^2\,\mathrm{c12i}}{8} - \mathrm{ci} + c^2\,\mathrm{ci} + \\
& \frac{\mathrm{c12}^2\,\mathrm{ci}}{4} - \frac{\mathrm{c12i}\,d}{4} - \frac{\mathrm{ci}\,d}{2} + \frac{\mathrm{c12i}\,\mathrm{prod}}{2} + \mathrm{ci}\,\mathrm{prod} + \\
& \mathrm{a2}\Big(\frac{c^2\,\mathrm{c12i}}{2} - \frac{3\,c^4\,\mathrm{c12i}}{4} + \frac{c^6\,\mathrm{c12i}}{4} + \frac{\mathrm{c12}^2\,\mathrm{c12i}}{8} - \frac{3}{8}c^2\,\mathrm{c12}^2\,\mathrm{c12i} + \frac{3}{16}c^4\,\mathrm{c12}^2\,\mathrm{c12i} - \\
& \frac{3\,\mathrm{c12}^4\,\mathrm{c12i}}{64} + \frac{3}{64}c^2\,\mathrm{c12}^4\,\mathrm{c12i} + \frac{\mathrm{c12}^6\,\mathrm{c12i}}{256} + c^2\,\mathrm{ci} - \frac{3\,c^4\,\mathrm{ci}}{2} + \frac{c^6\,\mathrm{ci}}{2} + \frac{\mathrm{c12}^2\,\mathrm{ci}}{4} - \\
& \frac{3}{4}c^2\,\mathrm{c12}^2\,\mathrm{ci} + \frac{3}{8}c^4\,\mathrm{c12}^2\,\mathrm{ci} - \frac{3\,\mathrm{c12}^4\,\mathrm{ci}}{32} + \frac{3}{32}c^2\,\mathrm{c12}^4\,\mathrm{ci} + \frac{\mathrm{c12}^6\,\mathrm{ci}}{128} - \frac{\mathrm{c12i}\,d}{4} + \\
& \frac{3}{4}c^2\,\mathrm{c12i}\,d - \frac{3}{8}c^4\,\mathrm{c12i}\,d + \frac{3}{16}\mathrm{c12}^2\,\mathrm{c12i}\,d - \frac{3}{16}c^2\,\mathrm{c12}^2\,\mathrm{c12i}\,d - \frac{3}{128}\mathrm{c12}^4\,\mathrm{c12i}\,d - \\
& \frac{\mathrm{ci}\,d}{2} + \frac{3}{2}c^2\,\mathrm{ci}\,d - \frac{3}{4}c^4\,\mathrm{ci}\,d + \frac{3}{8}\mathrm{c12}^2\,\mathrm{ci}\,d - \frac{3}{8}c^2\,\mathrm{c12}^2\,\mathrm{ci}\,d - \frac{3}{64}\mathrm{c12}^4\,\mathrm{ci}\,d - \\
& \frac{\mathrm{c12i}\,d^2}{4} + \frac{1}{4}c^2\,\mathrm{c12i}\,d^2 + \frac{1}{16}\mathrm{c12}^2\,\mathrm{c12i}\,d^2 - \frac{\mathrm{ci}\,d^2}{2} + \frac{1}{2}c^2\,\mathrm{ci}\,d^2 + \frac{1}{8}\mathrm{c12}^2\,\mathrm{ci}\,d^2 - \\
& \frac{\mathrm{c12i}\,d^3}{16} - \frac{\mathrm{ci}\,d^3}{8} - \frac{1}{4}c^4\,\mathrm{c12i}\,\mathrm{prod} - \frac{1}{8}c^2\,\mathrm{c12}^2\,\mathrm{c12i}\,\mathrm{prod} - \frac{1}{64}\mathrm{c12}^4\,\mathrm{c12i}\,\mathrm{prod} - \\
& \frac{1}{2}c^4\,\mathrm{ci}\,\mathrm{prod} - \frac{1}{4}c^2\,\mathrm{c12}^2\,\mathrm{ci}\,\mathrm{prod} - \frac{1}{32}\mathrm{c12}^4\,\mathrm{ci}\,\mathrm{prod} - \frac{\mathrm{c12i}\,d\,\mathrm{prod}}{4} + \frac{1}{2}c^2\,\mathrm{c12i}\,d\,\mathrm{prod} + \\
& \frac{1}{8}\mathrm{c12}^2\,\mathrm{c12i}\,d\,\mathrm{prod} - \frac{\mathrm{ci}\,d\,\mathrm{prod}}{2} + c^2\,\mathrm{ci}\,d\,\mathrm{prod} + \frac{1}{4}\mathrm{c12}^2\,\mathrm{ci}\,d\,\mathrm{prod} - \frac{3}{8}\mathrm{c12i}\,d^2\,\mathrm{prod} + \\
& \frac{1}{4}c^2\,\mathrm{c12i}\,d^2\,\mathrm{prod} + \frac{1}{16}\mathrm{c12}^2\,\mathrm{c12i}\,d^2\,\mathrm{prod} - \frac{3}{4}\mathrm{ci}\,d^2\,\mathrm{prod} + \frac{1}{2}c^2\,\mathrm{ci}\,d^2\,\mathrm{prod} + \\
& \frac{1}{8}\mathrm{c12}^2\,\mathrm{ci}\,d^2\,\mathrm{prod} - \frac{1}{8}\mathrm{c12i}\,d^3\,\mathrm{prod} - \frac{1}{4}\mathrm{ci}\,d^3\,\mathrm{prod} - \frac{\mathrm{c12i}\,\mathrm{prod}^2}{4} - \frac{1}{4}c^2\,\mathrm{c12i}\,\mathrm{prod}^2 - \\
& \frac{1}{16}\mathrm{c12}^2\,\mathrm{c12i}\,\mathrm{prod}^2 - \frac{\mathrm{ci}\,\mathrm{prod}^2}{2} - \frac{1}{2}c^2\,\mathrm{ci}\,\mathrm{prod}^2 - \frac{1}{8}\mathrm{c12}^2\,\mathrm{ci}\,\mathrm{prod}^2 + \frac{3}{8}\mathrm{c12i}\,d\,\mathrm{prod}^2 + \\
& \frac{3}{4}\mathrm{ci}\,d\,\mathrm{prod}^2 + \frac{1}{4}\mathrm{c12i}\,d^2\,\mathrm{prod}^2 + \frac{1}{2}\mathrm{ci}\,d^2\,\mathrm{prod}^2 + \frac{\mathrm{c12i}\,\mathrm{prod}^3}{4} + \frac{\mathrm{ci}\,\mathrm{prod}^3}{2}\Big) \\
= & \; 0 \qquad (12)
\end{aligned}
$$

Utilisant les résultats (12) à (19), les Eqs. (6) et (7) deviennent :

• $(A,B) = (1,1)$:

$$I_1 = \int_{\mathbb{R}^d} dc_{12}\, |c_{12}|\, e^{-c_{12}^2/2} \int_{\mathbb{R}^d} dc\, e^{-2c^2}\, K_1^{c^2 c_{12}^2} \overset{(12)}{=} 0 \tag{20}$$

$$I_2 = \int_{\mathbb{R}^d} dc_{12}\, |c_{12}|\, e^{-c_{12}^2/2} \int_{\mathbb{R}^d} dc\, e^{-2c^2}\, K_2^{c^2 c_{12}^2} \tag{21}$$

• $(A,B) = (V_2^2, 1)$: utilisant $c_2^2 = c^2 + 1/4\, c_{12}^2 - (c\cdot c_{12})$ il vient :

$$I_1 = V_T^2 \int_{\mathbb{R}^d} dc_{12}\, |c_{12}|\, e^{-c_{12}^2/2} \int_{\mathbb{R}^d} dc\, e^{-2c^2} \left[c^2 K_1^{c^2 c_{12}^2} + \frac{1}{4} c_{12}^2 K_1^{c^2 c_{12}^2} - (c\cdot c_{12}) K_1^{(c\cdot c_{12})} \right] \overset{(12),(14)}{=} 0 \tag{22}$$

$$I_2 = V_T^2 \int_{\mathbb{R}^d} dc_{12}\, |c_{12}|\, e^{-c_{12}^2/2} \int_{\mathbb{R}^d} dc\, e^{-2c^2} \left[c^2 K_2^{c^2 c_{12}^2} + \frac{1}{4} c_{12}^2 K_2^{c^2 c_{12}^2} - (c\cdot c_{12}) K_2^{(c\cdot c_{12})} \right] \tag{23}$$

• $(A,B) = (1, V_1^2)$: utilisant $c_1^2 = c^2 + 1/4\, c_{12}^2 + (c\cdot c_{12})$ il vient :

$$I_1 = V_T^2 \int_{\mathbb{R}^d} dc_{12}\, |c_{12}|\, e^{-c_{12}^2/2} \int_{\mathbb{R}^d} dc\, e^{-2c^2} \left[c^2 K_1^{c^2 c_{12}^2} + \frac{1}{4} c_{12}^2 K_1^{c^2 c_{12}^2} + (c\cdot c_{12}) K_1^{(c\cdot c_{12})} \right] \overset{(12),(14)}{=} 0 \tag{24}$$

$$I_2 = V_T^2 \int_{\mathbb{R}^d} dc_{12}\, |c_{12}|\, e^{-c_{12}^2/2} \int_{\mathbb{R}^d} dc\, e^{-2c^2} \left[c^2 K_2^{c^2 c_{12}^2} + \frac{1}{4} c_{12}^2 K_2^{c^2 c_{12}^2} + (c\cdot c_{12}) K_2^{(c\cdot c_{12})} \right] \tag{25}$$

• $(A,B) = (V_2, 1)$: utilisant $c_2 = c - 1/2\, c_{12}$ il vient :

$$I_1 = V_T \int_{\mathbb{R}^d} dc_{12}\, |c_{12}|\, e^{-c_{12}^2/2} \int_{\mathbb{R}^d} dc\, e^{-2c^2} \left[c_q K_1^{c_q} - \frac{1}{2} c_{12q} K_1^{c_{12q}} \right] \tag{26}$$

$$I_2 = V_T \int_{\mathbb{R}^d} dc_{12}\, |c_{12}|\, e^{-c_{12}^2/2} \int_{\mathbb{R}^d} dc\, e^{-2c^2} \left[c_q K_2^{c_q} - \frac{1}{2} c_{12q} K_2^{c_{12q}} \right] \overset{(17),(19)}{=} 0 \tag{27}$$

• $(A,B) = (1, V_1)$: utilisant $c_1 = c + 1/2\, c_{12}$ il vient :

$$I_1 = V_T \int_{\mathbb{R}^d} dc_{12}\, |c_{12}|\, e^{-c_{12}^2/2} \int_{\mathbb{R}^d} dc\, e^{-2c^2} \left[c_q K_1^{c_q} + \frac{1}{2} c_{12q} K_1^{c_{12q}} \right] \tag{28}$$

$$I_2 = V_T \int_{\mathbb{R}^d} dc_{12}\, |c_{12}|\, e^{-c_{12}^2/2} \int_{\mathbb{R}^d} dc\, e^{-2c^2} \left[c_q K_2^{c_q} + \frac{1}{2} c_{12q} K_2^{c_{12q}} \right] \overset{(17),(19)}{=} 0 \tag{29}$$

Nous voyons qu'il est donc nécessaire de calculer les 5 intégrales suivantes :

$$\int K_2^{c^2, c_{12}^2} \; ; \; \int \left(c^2 + \frac{1}{4} c_{12}^2\right) K_2^{c^2, c_{12}^2} \; ; \; \int (c\cdot c_{12}) K_2^{(c\cdot c_{12})} \; ; \; \int c_q K_1^{c_q} \; ; \; \int c_{12q} K_1^{c_{12q}} \tag{30}$$

où on a noté $\int$ pour $\int_{\mathbb{R}^d} dc_{12}\, |c_{12}|\, e^{-c_{12}^2/2} \int_{\mathbb{R}^d} dc\, e^{-2c^2}$. On voit apparaître dans les expressions (12) à (19) des termes du type $c_i c_{12j} c_k c_{12k}$ ainsi que $c_i c_j (c\cdot c_{12})^2 = c_i c_j c_k c_l c_{12k} c_{12l}$ qu'il faut intégrer. Nous aurons donc besoin des deux lemmes 3.6 et 3.7. Définissons

$$I^a[n] = \int_{\mathbb{R}^d} d\underline{x}\, |x|^n e^{-ax^2} = \frac{\pi^{d/2}}{a^{\frac{d+n}{2}}} \frac{\Gamma\left(\frac{d+n}{2}\right)}{\Gamma(d/2)}, \tag{31}$$

et notons dans les lemmes mentionnés ci-dessus $M_{ij}[n] = M^a_{ij}[n]$, $M_{ijkl}[n] = M^a_{ijkl}[n]$. De plus, nous aurons besoin des relations

$$M^a_{jk} M^{a'}_{ik} = M^a_{ik} M^{a'}_{jk} = M^a M^{a'} \delta_{ij}, \tag{32}$$

car $M^a_{ij} = M^a \delta_{ij}$, et où M^a est défini par l'Eq. (8). De plus :

$$M^a_{kl} M^{a'}_{kl} = d\, M^a M^{a'}. \tag{33}$$

Finalement, utilisant les Eqs. (14) et (16) :

En fait, comme $\xi_T^{(1)}$ est proportionnel à la somme des Eqs. (23) et (25) (et (21)), on voit que le terme $\int (c_1\cdot c_2) K^{(c_1\cdot c_2)}$ n'intervient pas. De même, pour $\xi_{ui}^{(1)}$ qui est proportionnel à la somme des Eqs. (26) et (28), l'intégrale $\int c_{12q} K^{c_{12q}}$ n'intervient pas. Il reste ainsi 3 intégrales à calculer : $\int K_2^{c^2 c_{12}^2}$; $\int (c^2 + \frac{1}{4} c_{12}^2) K_2^{c^2 c_{12}^2}$; $\int c_q K_1^{c_q}$.

$$
\begin{aligned}
M^a_{ijkl} M^{a'}_{kl} &= b^a M^{a'} \underbrace{\delta_{ijkl}\,\delta_{kl}}_{\substack{=\delta_{ij}\delta_{kl}\delta_{ik}\delta_{kl} \\ =\delta_{ij}\sum_{kl}\delta_{kl}\delta_{ik} \\ =\delta_{ij}}} + \frac{b^a}{3} M^{a'} \left[\delta_{ij}\delta_{kl}(1-\delta_{ik}) + \delta_{ik}\delta_{jl}(1-\delta_{ij}) + \delta_{il}\delta_{jk}(1-\delta_{ij})\right]\delta_{kl} \\
&= b^a M^{a'}\delta_{ij} + \frac{b^a}{3} M^{a'} \Big[\delta_{ij} \underbrace{\sum_{kl}\delta_{kl}(1-\delta_{ik})}_{\substack{=\sum_{kl}\delta_{kl} - \sum_k \delta_{ik}\sum_l \delta_{kl} \\ = d - \sum_k \delta_{ik}}} + (1-\delta_{ij}) \underbrace{\sum_{kl}\delta_{ik}\delta_{jl}\delta_{kl}}_{\substack{=\sum_k \delta_{ik} \sum_l \delta_{jl}\delta_{kl},\ \sum_l \delta_{jl}\delta_{kl} = \delta_{jk} \\ = \delta_{ij}}} + (1-\delta_{ij}) \underbrace{\sum_{kl}\delta_{il}\delta_{jk}\delta_{kl}}_{\substack{=\sum_k \delta_{jk}\sum_l \delta_{il}\delta_{kl},\ \sum_l \delta_{il}\delta_{kl} = \delta_{ik} \\ = \delta_{ij}}} \Big] \\
&= b^a M^{a'}\delta_{ij} + \frac{b^a}{3} M^{a'} \Big[\delta_{ij}(d-1) + \underbrace{(1-\delta_{ij})\delta_{ij}}_{\substack{=\delta_{ij}-\delta_{ij}^2 \\ =0}} + \underbrace{(1-\delta_{ij})\delta_{ij}}_{\substack{=\delta_{ij}-\delta_{ij}^2 \\ =0}} \Big] \\
&= b^a M^{a'}\delta_{ij}\left(1 + \frac{d-1}{3}\right) \\
&= \frac{d+2}{3}\, b^a M^{a'} \delta_{ij} \qquad (34)
\end{aligned}
$$

⊛ (13b)

On a ainsi:

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} dc_{12}\, |c_{12}|\, e^{-c_{12}^2/2} \int_{\mathbb{R}^d} dc\, e^{-2c^2} K_2^{c^2, c_{12}^2} &= \frac{1}{4}\delta_{ij} M^{1/2}[1] I^2[0] + \delta_{ij} I^{1/2}[1] M^2[0] - \frac{1}{d}\delta_{ij} I^{1/2}[1] I^2[2] - \frac{1}{4d}\delta_{ij} I^{1/2}[3] I^2[0] \\
&+ a_2 \delta_{ij} \Big[-\frac{1}{4} M^{1/2}[1] I^2[2] + \frac{1}{8} M^{1/2}[1] I^2[4] - \frac{1}{16} M^{1/2}[3] I^2[0] + \frac{1}{16} M^{1/2}[3] I^2[2] \\
&+ \frac{1}{128} M^{1/2}[5] I^2[0] - I^{1/2}[1] M^2[2] + \frac{1}{2} I^{1/2}[1] M^2[4] - \frac{1}{4} I^{1/2}[3] M^2[0] \\
&+ \frac{1}{4} I^{1/2}[3] M^2[2] + \frac{1}{32} I^{1/2}[5] M^2[0] + \frac{d}{8} M^{1/2}[1] I^2[0] - \frac{d}{8} M^{1/2}[1] I^2[2] \\
&- \frac{d}{32} M^{1/2}[3] I^2[0] + \frac{d}{2} I^{1/2}[1] M^2[0] - \frac{d}{2} I^{1/2}[1] M^2[2] - \frac{d}{8} I^{1/2}[3] M^2[0] \\
&+ \frac{d^2}{16} M^{1/2}[1] I^2[0] + \frac{d^2}{4} I^{1/2}[1] M^2[0] - \frac{1}{2} I^{1/2}[1] I^2[2] + \frac{1}{2} I^{1/2}[1] I^2[4] \\
&- \frac{1}{8} I^{1/2}[3] I^2[0] + \frac{1}{4} I^{1/2}[3] I^2[2] + \frac{1}{32} I^{1/2}[5] I^2[0] + \frac{1}{d} I^{1/2}[1] I^2[4] \\
&- \frac{1}{2d} I^{1/2}[1] I^2[6] + \frac{1}{2d} I^{1/2}[3] I^2[2] - \frac{3}{8d} I^{1/2}[3] I^2[4] + \frac{1}{16d} I^{1/2}[5] I^2[0] \\
&- \frac{3}{32d} I^{1/2}[5] I^2[2] - \frac{1}{128d} I^{1/2}[7] I^2[0] - \frac{d}{4} I^{1/2}[1] I^2[2] - \frac{d}{16} I^{1/2}[3] I^2[0] \\
&- \frac{1}{2} M^{1/2}[1] M^2[2] - \frac{1}{8} M^{1/2}[3] M^2[0] - \frac{1}{2} M^{1/2}[1] M^2[2] - \frac{1}{8} M^{1/2}[3] M^2[0] \\
&+ \frac{d^2}{4} M^{1/2}[1] M^2[0] + \frac{d^2}{4} M^{1/2}[1] M^2[0] + \frac{d}{2} M^{1/2}[1] M^2[0] + \frac{d}{2} M^{1/2}[1] M^2[0] + \frac{1}{8}\frac{d+2}{3} b^{1/2}[1] M^2[0] + \frac{1}{2}\frac{d+2}{3} M^{1/2}[1] b^2[0] \\
&- d M^{1/2}[1] M^2[0] + \frac{1}{2d} d M^{1/2}[1] M^2[2] + \frac{1}{8d} d M^{1/2}[3] M^2[0] - \frac{d}{2} d M^{1/2}[1] M^2[0]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \delta_{ij} \left[\frac{1}{4} M^{1/2}[1] I^2[0] + I^{1/2}[1] M^2[0] - \frac{1}{d} I^{1/2}[1] I^2[2] - \frac{1}{4d} I^{1/2}[3] I^2[0] \right] \\
&+ a_2 \delta_{ij} \Big[-\frac{d+2}{8} M^{1/2}[1] I^2[2] + \frac{1}{8} M^{1/2}[1] I^2[4] - \frac{d+2}{32} M^{1/2}[3] I^2[0] + \frac{1}{16} M^{1/2}[3] I^2[2] \\
&+ \frac{1}{128} M^{1/2}[5] I^2[0] - \frac{d+2}{2} I^{1/2}[1] M^2[2] + \frac{1}{2} I^{1/2}[1] M^2[4] - \frac{1}{4} I^{1/2}[3] M^2[0] \\
&+ \frac{1}{4} I^{1/2}[3] M^2[2] + \frac{1}{32} I^{1/2}[5] M^2[0] + \frac{d(d+2)}{16} M^{1/2}[1] I^2[0] + \frac{d(d+2)}{4} I^{1/2}[1] M^2[0] \\
&- \frac{d}{8} I^{1/2}[3] M^2[0] - \frac{d+2}{4} I^{1/2}[1] I^2[2] + \frac{d+2}{2d} I^{1/2}[1] I^2[4] - \frac{d+2}{16} I^{1/2}[3] I^2[0] \\
&+ \frac{d+2}{4d} I^{1/2}[3] I^2[2] + \frac{d+2}{32d} I^{1/2}[5] I^2[0] - \frac{1}{2d} I^{1/2}[1] I^2[6] - \frac{3}{8d} I^{1/2}[3] I^2[4] \\
&- \frac{3}{32d} I^{1/2}[5] I^2[2] - \frac{1}{128d} I^{1/2}[7] I^2[0] - \frac{1}{2} M^{1/2}[1] M^2[2] - \frac{1}{8} M^{1/2}[3] M^2[0] \\
&+ \frac{d+2}{24} b^{1/2}[1] M^2[0] + \frac{d+2}{6} M^{1/2}[1] b^2[0] \Big] \qquad (35)
\end{aligned}
$$

On aura aussi besoin des relations suivantes pour $M^a_{ikem}M^{a'}_{jkem}$ et $M^a_{kemn}M^{a'}_{kemn}$:

$$M^a_{ikem}M^{a'}_{jkem} = \left[b^a\delta_{ikem} + \frac{b^a}{3}\left\{\delta_{ik}\delta_{em}(1-\delta_{ie}) + \delta_{ie}\delta_{km}(1-\delta_{ik}) + \delta_{im}\delta_{ke}(1-\delta_{ik})\right\}\right] \times$$

$$\times \left[b^{a'}\delta_{jkem} + \frac{b^{a'}}{3}\left\{\delta_{jk}\delta_{em}(1-\delta_{je}) + \delta_{je}\delta_{km}(1-\delta_{jk}) + \delta_{jm}\delta_{ke}(1-\delta_{jk})\right\}\right]$$

$$= b^a b^{a'}\delta_{ikem}\delta_{jkem} + \frac{b^a b^{a'}}{3}\delta_{ikem}\left\{\delta_{jk}\delta_{em}(1-\delta_{je}) + \delta_{je}\delta_{km}(1-\delta_{jk}) + \delta_{jm}\delta_{ke}(1-\delta_{jk})\right\}$$

$$+ \frac{b^a b^{a'}}{3}\delta_{jkem}\left\{\delta_{ik}\delta_{em}(1-\delta_{ie}) + \delta_{ie}\delta_{km}(1-\delta_{ik}) + \delta_{im}\delta_{ke}(1-\delta_{ik})\right\}$$

$$+ \frac{b^a b^{a'}}{9}\left\{\delta_{ik}\delta_{em}(1-\delta_{ie}) + \delta_{ie}\delta_{km}(1-\delta_{ik}) + \delta_{im}\delta_{ke}(1-\delta_{ik})\right\}\left\{\delta_{jk}\delta_{em}(1-\delta_{je}) + \delta_{je}\delta_{km}(1-\delta_{jk}) + \delta_{jm}\delta_{ke}(1-\delta_{jk})\right\},$$

avec :

(34b)

$$\delta_{ikem}\delta_{jkem} = \sum_{kem}\delta_{ik}\delta_{ke}\delta_{em}\delta_{jk}\delta_{ke}\delta_{em} = \sum_k\delta_{ik}\delta_{jk}\sum_e\delta_{ke}\sum_m\delta_{em} = \delta_{ij} \qquad (34c)$$

$$\begin{aligned}\delta_{ikem}\delta_{jk}\delta_{em}(1-\delta_{je}) &= \sum_{kem}\delta_{ik}\delta_{ke}\delta_{em}\delta_{jk}\delta_{em} - \sum_{kem}\delta_{ik}\delta_{ke}\delta_{em}\delta_{jk}\delta_{em}\delta_{je}\\ &= \sum_k\delta_{ik}\delta_{jk}\sum_e\delta_{ke}\sum_m\delta_{em} - \sum_k\delta_{ik}\delta_{jk}\sum_e\delta_{ke}\delta_{je}\sum_m\delta_{em}\\ &= \delta_{ij} - \sum_k\delta_{ik}\delta_{jk}\delta_{kj}\\ &= \delta_{ij} - \delta_{ij}\\ &= 0\end{aligned} \qquad (34d)$$

$$\begin{aligned}\delta_{ikem}\delta_{je}\delta_{km}(1-\delta_{jk}) &= \sum_{kem}\delta_{ik}\delta_{ke}\delta_{em}\delta_{je}\delta_{km} - \sum_{kem}\delta_{ik}\delta_{ke}\delta_{em}\delta_{je}\delta_{km}\delta_{jk}\\ &= \sum_k\delta_{ik}\sum_e\delta_{ke}\delta_{je}\sum_m\delta_{km} - \sum_k\delta_{ik}\delta_{jk}\sum_e\delta_{ke}\delta_{je}\sum_m\delta_{em}\delta_{km}\\ &= \delta_{ij} - \sum_k\delta_{ik}\delta_{jk}\sum_e\delta_{ke}\delta_{je}\delta_{ek}\\ &= \delta_{ij} - \delta_{ij}\\ &= 0\end{aligned} \qquad (34e)$$

$$\begin{aligned}\delta_{ikem}\delta_{jm}\delta_{ke}(1-\delta_{jk}) &= \sum_{kem}\delta_{ik}\delta_{ke}\delta_{em}\delta_{jm}\delta_{ke} - \sum_{kem}\delta_{ik}\delta_{ke}\delta_{em}\delta_{jm}\delta_{ke}\delta_{jk}\\ &= \sum_k\delta_{ik}\sum_e\delta_{ke}\sum_m\delta_{em}\delta_{jm} - \sum_k\delta_{ik}\delta_{jk}\sum_e\delta_{ke}\sum_m\delta_{em}\delta_{jm}\\ &= \delta_{ij} - \delta_{ij}\\ &= 0\end{aligned} \qquad (34f)$$

Pour les sommes avec δ_{jkem} il suffit d'échanger les indices i et j dans (34d) à (34f), et on obtient ainsi les mêmes résultats. On a :

$$\begin{aligned}\delta_{ik}\delta_{em}(1-\delta_{ie})\delta_{jk}\delta_{em}(1-\delta_{je}) &= \sum_{kem}\delta_{ik}\delta_{em}\delta_{jk}\cancel{\delta_{em}} + \sum_{kem}\delta_{ik}\delta_{em}\delta_{ie}\delta_{jk}\cancel{\delta_{em}}\delta_{je}\\ &\quad - \sum_{kem}\delta_{ik}\delta_{em}\delta_{ie}\delta_{jk}\cancel{\delta_{em}} - \sum_{kem}\delta_{ik}\delta_{em}\delta_{jk}\cancel{\delta_{em}}\delta_{je}\\ &= \sum_k\delta_{ik}\delta_{jk}\sum_e\sum_m\delta_{em} + \sum_k\delta_{ik}\delta_{jk}\sum_e\delta_{ie}\delta_{je}\sum_m\delta_{em}\\ &\quad - \sum_k\delta_{ik}\delta_{jk}\sum_e\delta_{ie}\sum_m\delta_{em} - \sum_k\delta_{ik}\delta_{jk}\sum_e\delta_{je}\sum_m\delta_{em}\\ &= d\,\delta_{ij} + \delta_{ij} - \delta_{ij} - \delta_{ij} = \delta_{ij}(d-1)\end{aligned} \qquad (34g)$$

$$\begin{aligned}
\delta_{ik}\delta_{\ell m}(1-\delta_{i\ell})\delta_{j\ell}\delta_{km}(1-\delta_{jk}) &= \sum_{k\ell m}\delta_{ik}\delta_{\ell m}\delta_{j\ell}\delta_{km} + \sum_{k\ell m}\delta_{ik}\delta_{\ell m}\delta_{i\ell}\delta_{j\ell}\delta_{km}\delta_{jk} \\
&\quad - \sum_{k\ell m}\delta_{ik}\delta_{\ell m}\delta_{i\ell}\delta_{j\ell}\delta_{km} - \sum_{k\ell m}\delta_{ik}\delta_{\ell m}\delta_{j\ell}\delta_{km}\delta_{jk} \\
&= \sum_k\delta_{ik}\sum_\ell\delta_{j\ell}\sum_m\delta_{\ell m}\delta_{km} + \sum_k\delta_{ik}\delta_{jk}\sum_\ell\delta_{i\ell}\delta_{j\ell}\sum_m\delta_{\ell m}\delta_{km} \\
&\quad - \sum_k\delta_{ik}\sum_\ell\delta_{i\ell}\delta_{j\ell}\sum_m\delta_{\ell m}\delta_{km} - \sum_k\delta_{ik}\delta_{jk}\sum_\ell\delta_{j\ell}\sum_m\delta_{\ell m}\delta_{km} \\
&= \sum_k\delta_{ik}\sum_\ell\delta_{j\ell}\delta_{\ell k} + \sum_k\delta_{ik}\delta_{jk}\sum_\ell\delta_{i\ell}\delta_{j\ell}\delta_{\ell k} \\
&\quad - \sum_k\delta_{ik}\sum_\ell\delta_{i\ell}\delta_{j\ell}\delta_{\ell k} - \sum_k\delta_{ik}\delta_{jk}\sum_\ell\delta_{j\ell}\delta_{\ell k} \\
&= \cancel{\delta_{ij}} + \sum_k\delta_{ik}\delta_{jk}\delta_{ij}\delta_{ik} - \sum_k\delta_{ik}\delta_{ij}\delta_{ik} - \cancel{\delta_{ij}} \\
&= 0
\end{aligned} \tag{34e}$$

$$\begin{aligned}
\delta_{ik}\delta_{\ell m}(1-\delta_{i\ell})\delta_{jm}\delta_{k\ell}(1-\delta_{jk}) &= \sum_{k\ell m}\delta_{ik}\delta_{\ell m}\delta_{jm}\delta_{k\ell} + \sum_{k\ell m}\delta_{ik}\delta_{\ell m}\delta_{i\ell}\delta_{jm}\delta_{k\ell}\delta_{jk} \\
&\quad - \sum_{k\ell m}\delta_{ik}\delta_{\ell m}\delta_{i\ell}\delta_{jm}\delta_{k\ell} - \sum_{k\ell m}\delta_{ik}\delta_{\ell m}\delta_{jm}\delta_{k\ell}\delta_{jk} \\
&= \sum_k\delta_{ik}\sum_\ell\delta_{k\ell}\sum_m\delta_{\ell m}\delta_{jm} + \sum_k\delta_{ik}\delta_{jk}\sum_\ell\delta_{i\ell}\delta_{k\ell}\sum_m\delta_{\ell m}\delta_{jm} \\
&\quad - \sum_k\delta_{ik}\sum_\ell\delta_{i\ell}\sum_m\delta_{\ell m}\delta_{jm} - \sum_k\delta_{ik}\delta_{jk}\sum_\ell\delta_{k\ell}\sum_m\delta_{\ell m}\delta_{jm} \\
&= \delta_{ij} + \sum_k\delta_{ik}\delta_{jk}\delta_{ij}\delta_{ik} - \sum_k\delta_{ik}\delta_{ij} - \delta_{ij} \\
&= 0
\end{aligned} \tag{34f}$$

$$\begin{aligned}
\delta_{i\ell}\delta_{km}(1-\delta_{ik})\delta_{jk}\delta_{\ell m}(1-\delta_{j\ell}) &= \sum_{k\ell m}\delta_{i\ell}\delta_{km}\delta_{jk}\delta_{\ell m} + \sum_{k\ell m}\delta_{i\ell}\delta_{km}\delta_{ik}\delta_{jk}\delta_{\ell m}\delta_{j\ell} \\
&\quad - \sum_{k\ell m}\delta_{i\ell}\delta_{km}\delta_{ik}\delta_{jk}\delta_{\ell m} - \sum_{k\ell m}\delta_{i\ell}\delta_{km}\delta_{jk}\delta_{\ell m}\delta_{j\ell} \\
&= \sum_k\delta_{jk}\sum_\ell\delta_{i\ell}\sum_m\delta_{km}\delta_{\ell m} + \sum_k\delta_{ik}\delta_{jk}\sum_\ell\delta_{i\ell}\delta_{j\ell}\sum_m\delta_{km}\delta_{\ell m} \\
&\quad - \sum_k\delta_{ik}\delta_{jk}\sum_\ell\delta_{i\ell}\sum_m\delta_{km}\delta_{\ell m} - \sum_k\delta_{jk}\sum_\ell\delta_{i\ell}\delta_{j\ell}\sum_m\delta_{km}\delta_{\ell m} \\
&= \delta_{ij} + \delta_{ij} - \delta_{ij} - \delta_{ij} \\
&= 0
\end{aligned} \tag{34g}$$

$$\begin{aligned}
\delta_{i\ell}\delta_{km}(1-\delta_{ik})\delta_{j\ell}\delta_{km}(1-\delta_{jk}) &= \sum_{k\ell m}\delta_{i\ell}\delta_{km}\delta_{j\ell}\delta_{km} + \sum_{k\ell m}\delta_{i\ell}\delta_{km}\delta_{ik}\delta_{j\ell}\delta_{km}\delta_{jk} \\
&\quad - \sum_{k\ell m}\delta_{i\ell}\delta_{km}\delta_{ik}\delta_{j\ell}\delta_{km} - \sum_{k\ell m}\delta_{i\ell}\delta_{km}\delta_{j\ell}\delta_{km}\delta_{jk} \\
&= \sum_k\sum_\ell\delta_{i\ell}\delta_{j\ell}\sum_m\delta_{km} + \sum_k\delta_{ik}\delta_{jk}\sum_\ell\delta_{i\ell}\delta_{j\ell}\sum_m\delta_{km} \\
&\quad - \sum_k\delta_{ik}\sum_\ell\delta_{i\ell}\delta_{j\ell}\sum_m\delta_{km} - \sum_k\delta_{jk}\sum_\ell\delta_{i\ell}\delta_{j\ell}\sum_m\delta_{km} \\
&= d\,\delta_{ij} + \delta_{ij} - \delta_{ij} - \delta_{ij} \\
&= \delta_{ij}(d-1)
\end{aligned} \tag{34h}$$

$$\delta_{ie}\delta_{km}(1-\delta_{ik})\delta_{jm}\delta_{ke}(1-\delta_{jk}) = \sum_{kem}\delta_{ie}\delta_{km}\delta_{jm}\delta_{ke} + \sum_{kem}\delta_{ie}\delta_{km}\delta_{ik}\delta_{jm}\delta_{ke}\delta_{jk}$$

$$- \sum_{kem}\delta_{ie}\delta_{km}\delta_{ik}\delta_{jm}\delta_{ke} - \sum_{kem}\delta_{ie}\delta_{km}\delta_{jm}\delta_{ke}\delta_{jk}$$

$$= \sum_k\sum_e\delta_{ie}\delta_{ke}\sum_m\delta_{km}\delta_{jm} + \sum_k\delta_{ik}\delta_{jk}\sum_e\delta_{ie}\delta_{ke}\sum_m\delta_{km}\delta_{jm}$$

$$- \sum_k\delta_{ik}\sum_e\delta_{ie}\delta_{ke}\sum_m\delta_{km}\delta_{jm} - \sum_k\delta_{jk}\sum_e\delta_{ie}\delta_{ke}\sum_m\delta_{km}\delta_{jm}$$

$$= \sum_k\sum_e\delta_{ie}\delta_{ke}\delta_{kj} + \delta_{ij} - \delta_{ij} - \delta_{ij}$$

$$= \sum_k\delta_{ik}\delta_{jk} - \delta_{ij}$$

$$= 0 \qquad (34i)$$

$$\delta_{im}\delta_{ke}(1-\delta_{ik})\delta_{jk}\delta_{em}(1-\delta_{je}) = \sum_{kem}\delta_{im}\delta_{ke}\delta_{jk}\delta_{em} + \sum_{kem}\delta_{im}\delta_{ke}\delta_{ik}\delta_{jk}\delta_{em}\delta_{je}$$

$$- \sum_{kem}\delta_{im}\delta_{ke}\delta_{ik}\delta_{jk}\delta_{em} - \sum_{kem}\delta_{im}\delta_{ke}\delta_{jk}\delta_{em}\delta_{je}$$

$$= \sum_k\delta_{jk}\sum_e\delta_{ke}\sum_m\delta_{im}\delta_{em} + \sum_k\delta_{ik}\delta_{jk}\sum_e\delta_{ke}\delta_{je}\sum_m\delta_{im}\delta_{em}$$

$$- \sum_k\delta_{ik}\delta_{jk}\sum_e\delta_{ke}\sum_m\delta_{im}\delta_{em} - \sum_k\delta_{jk}\sum_e\delta_{ke}\delta_{je}\sum_m\delta_{im}\delta_{em}$$

$$= \delta_{ij} + \delta_{ij} - \delta_{ij} - \delta_{ij}$$

$$= 0 \qquad (34j)$$

$$\delta_{im}\delta_{ke}(1-\delta_{ik})\delta_{je}\delta_{km}(1-\delta_{jk}) = \sum_{kem}\delta_{im}\delta_{ke}\delta_{je}\delta_{km} + \sum_{kem}\delta_{im}\delta_{ke}\delta_{ik}\delta_{je}\delta_{km}\delta_{jk}$$

$$- \sum_{kem}\delta_{im}\delta_{ke}\delta_{ik}\delta_{je}\delta_{km} - \sum_{kem}\delta_{im}\delta_{ke}\delta_{je}\delta_{km}\delta_{jk}$$

$$= \sum_k\sum_e\delta_{ke}\delta_{je}\sum_m\delta_{im}\delta_{km} + \sum_k\delta_{ik}\delta_{jk}\sum_e\delta_{ke}\delta_{je}\sum_m\delta_{im}\delta_{km}$$

$$- \sum_k\delta_{ik}\sum_e\delta_{ke}\delta_{je}\sum_m\delta_{km} - \sum_k\delta_{jk}\sum_e\delta_{ke}\delta_{je}\sum_m\delta_{im}\delta_{km}$$

$$= \sum_k\delta_{ik}\sum_e\delta_{ke}\delta_{je} + \delta_{ij} - \delta_{ij} - \delta_{ij}$$

$$= \sum_k\delta_{ik}\delta_{jk} - \delta_{ij}$$

$$= 0 \qquad (34k)$$

$$\delta_{im}\delta_{ke}(1-\delta_{ik})\delta_{jm}\delta_{ke}(1-\delta_{jk}) = \sum_{kem}\delta_{im}\delta_{ke}\delta_{jm}\delta_{ke} + \sum_{kem}\delta_{im}\delta_{ke}\delta_{ik}\delta_{jm}\delta_{ke}\delta_{jk}$$

$$- \sum_{kem}\delta_{im}\delta_{ke}\delta_{ik}\delta_{jm}\delta_{ke} - \sum_{kem}\delta_{im}\delta_{ke}\delta_{jm}\delta_{ke}\delta_{jk}$$

$$= \sum_k\sum_e\delta_{ke}\sum_m\delta_{im}\delta_{jm} + \sum_k\delta_{ik}\delta_{jk}\sum_e\delta_{ke}\delta_{jk}\sum_m\delta_{im}\delta_{jm}$$

$$- \sum_k\delta_{ik}\sum_e\delta_{ke}\sum_m\delta_{im}\delta_{jm} - \sum_k\delta_{jk}\sum_e\delta_{ke}\sum_m\delta_{im}\delta_{jm}$$

$$= d\,\delta_{ij} + \delta_{ij} - \delta_{ij} - \delta_{ij}$$

$$= \delta_{ij}(d-1) \qquad (34l)$$

Utilisant les relations (34c) à (34l) dans (34b) il vient:

$$M^{a}_{ikem} M^{a'}_{jkem} = b^{a} b^{a'} \delta_{ij} + \frac{b^{a} b^{a'}}{9}\, 3(d-1)\, \delta_{ij}$$

$$= \delta_{ij}\, b^{a} b^{a'} \left[1 + \frac{d-1}{3} \right]$$

$$= \frac{d+2}{3}\, b^{a} b^{a'}\, \delta_{ij}. \qquad (34m)$$

Pour trouver $M^{a}_{kemn} M^{a'}_{kemn}$, il suffit de reprendre le résultat (34m) avec $i=j$ et en sommant sur i :

$$M^{a}_{kemn} M^{a'}_{kemn} = \frac{d(d+2)}{3}\, b^{a} b^{a'} \qquad (34n)$$

Pour le calcul de $\int (c^2 + c_{12}^2/4) K_2^{c^2, c_{12}^2}$, on reprend l'expression (35) dans laquelle on incrémente de 2 unités le compteur en seconde position dans les produits IM, MI, II, MM, bM, et Mb, expression à laquelle on ajoute 1/4 fois l'Eq. (35) dans laquelle on incrémente de 2 unités le premier compteur.

On a :

$$\int_{\mathbb{R}^d} dc_{12} |c_{12}| e^{-c_{12}^2/2} \int_{\mathbb{R}^d} dc\, e^{-2c^2} (c \cdot c_{12}) K_2^{(c \cdot c_{12})} = \frac{1}{2} M^{1/2}[1] M^2[0] \delta_{ij} + \frac{1}{2} M^{1/2}[1] M^2[0] \delta_{ij} - \frac{1}{d} \delta_{ij}\, d\, M^{1/2}[1] M^{1/2}[0]$$

$$+ a_2 \delta_{ij} \Big[-\frac{1}{2} M^{1/2}[1] M^2[2] + \frac{1}{4} M^{1/2}[1] M^2[4] - \frac{1}{8} M^{1/2}[3] M^2[0] + \frac{1}{8} M^{1/2}[3] M^2[2]$$
$$+ \frac{1}{64} M^{1/2}[5] M^2[0] - \frac{1}{2} M^{1/2}[1] M^2[2] + \frac{1}{4} M^{1/2}[1] M^2[4] - \frac{1}{8} M^{1/2}[3] M^2[0]$$
$$+ \frac{1}{8} M^{1/2}[3] M^2[2] + \frac{1}{64} M^{1/2}[5] M^2[0] + \frac{d}{4} M^{1/2}[1] M^2[0] - \frac{d}{4} M^{1/2}[1] M^2[2]$$
$$- \frac{d}{16} M^{1/2}[3] M^2[0] + \frac{d}{4} M^{1/2}[1] M^2[0] - \frac{d}{4} M^{1/2}[1] M^2[2] - \frac{d}{16} M^{1/2}[3] M^2[0]$$
$$+ \frac{d^2}{8} M^{1/2}[1] M^2[0] + \frac{d^2}{8} M^{1/2}[1] M^2[0] - \frac{1}{4} \frac{d+2}{3} b^{1/2}[1] M^2[2] - \frac{1}{16} \frac{d+2}{3} b^{1/2}[3] M^2[0]$$
$$- \frac{d+2}{3} M^{1/2}[1] b^2[2] - \frac{1}{4} \frac{d+2}{3} M^{1/2}[3] b^2[0] + \frac{d}{4} \frac{d+2}{3} b^{1/2}[1] M^2[0] + d \frac{d+2}{3} M^{1/2}[1] b^2[0]$$
$$+ \frac{d^2}{8} \frac{d+2}{3} b^{1/2}[1] M^2[0] + \frac{d^2}{2} \frac{d+2}{3} M^{1/2}[1] b^2[0] - \frac{1}{2} d M^{1/2}[1] M^2[0] - \frac{1}{2} d M^{1/2}[1] M^2[2]$$
$$- \frac{1}{8} d M^{1/2}[3] M^{1/2}[0] + \frac{1}{d} d M^{1/2}[1] M^2[2] + \frac{1}{2d} d M^{1/2}[1] M^2[4] + \frac{1}{4d} d M^{1/2}[3] M^2[0]$$
$$+ \frac{1}{4d} d M^{1/2}[3] M^2[2] + \frac{1}{32d} d M^{1/2}[5] M^2[0] - \frac{d}{4} d M^{1/2}[1] M^{1/2}[0] - \frac{d}{2} d M^{1/2}[1] M^2[2]$$
$$- \frac{d}{8} d M^{1/2}[3] M^2[0] + \frac{1}{4} \frac{d+2}{3} b^{1/2}[1] b^2[0] + \frac{1}{4} \frac{d+2}{3} b^{1/2}[1] b^2[0] + \frac{1}{2d} \frac{d(d+2)}{3} b^{1/2}[1] b^2[0] \Big]$$

$$= \delta_{ij} \frac{d-1}{d} M^{1/2}[1] M^2[0]$$
$$+ a_2 \delta_{ij} \Big[-\frac{d(d+2)}{2} M^{1/2}[1] M^2[2] + M^{1/2}[1] M^2[4] - \frac{d(d+2)}{8} M^{1/2}[3] M^2[0] + \frac{1}{2} M^{1/2}[3] M^2[2]$$
$$+ \frac{1}{16} M^{1/2}[5] M^2[0] - \frac{5(d+2)}{12} b^{1/2}[1] M^2[2] - \frac{5(d+2)}{48} b^{1/2}[3] M^2[0]$$
$$+ \frac{5d(d+2)^2}{24} b^{1/2}[1] M^2[0] \Big] \qquad (36)$$

On a :

$$\int_{\mathbb{R}^d} dc_{12} |c_{12}| e^{-c_{12}^2/2} \int_{\mathbb{R}^d} dc\, e^{-2c^2} c_q K_1^{c_q} = -I^{1/2}[1] M^2[0] \delta_{iq} + I^{1/2}[1] M^2[2] \delta_{iq} + \frac{1}{4} I^{1/2}[3] M^2[0] \delta_{iq}$$
$$- \frac{d}{2} I^{1/2}[1] M^2[0] \delta_{iq} + \frac{1}{2} M^{1/2}[1] M^2[0] \delta_{iq}$$
$$+ a_2 \delta_{iq} \Big[I^{1/2}[1] M^2[2] - \frac{3}{2} I^{1/2}[1] M^2[4] + \frac{1}{2} I^{1/2}[1] M^2[6] + \frac{1}{4} I^{1/2}[3] M^2[0]$$
$$- \frac{3}{4} I^{1/2}[3] M^2[2] + \frac{3}{8} I^{1/2}[3] M^2[4] - \frac{3}{32} I^{1/2}[5] M^2[0] + \frac{3}{32} I^{1/2}[5] M^2[2]$$
$$+ \frac{1}{128} I^{1/2}[7] M^2[0] - \frac{d}{2} I^{1/2}[1] M^2[0] + \frac{3d}{2} I^{1/2}[1] M^2[2] - \frac{3d}{4} I^{1/2}[1] M^2[4]$$
$$+ \frac{3d}{8} I^{1/2}[3] M^2[0] - \frac{3d}{8} I^{1/2}[3] M^2[2] - \frac{3d}{64} I^{1/2}[5] M^2[0] - \frac{d^2}{2} I^{1/2}[1] M^2[0]$$
$$+ \frac{d^2}{2} I^{1/2}[1] M^2[2] + \frac{d^2}{8} I^{1/2}[3] M^2[0] - \frac{d^3}{8} I^{1/2}[1] M^2[0] - \frac{1}{4} M^{1/2}[1] M^2[4]$$
$$- \frac{1}{8} M^{1/2}[3] M^2[2] - \frac{1}{64} M^{1/2}[5] M^2[0] - \frac{d}{4} M^{1/2}[1] M^2[0] + \frac{d}{2} M^{1/2}[1] M^2[2]$$
$$+ \frac{d}{8} M^{1/2}[3] M^2[0] - \frac{3d^2}{8} M^{1/2}[1] M^2[0] + \frac{d^2}{4} M^{1/2}[1] M^2[2] + \frac{d^2}{16} M^{1/2}[3] M^2[0]$$
$$- \frac{d^3}{8} M^{1/2}[1] M^2[0] - \frac{1}{2} \frac{d+2}{3} M^{1/2}[1] b^2[0] - \frac{1}{2} \frac{d+2}{3} M^{1/2}[1] b^2[2] - \frac{1}{8} \frac{d+2}{3} M^{1/2}[3] b^2[0]$$
$$+ \frac{3d}{4} \frac{d+2}{3} M^{1/2}[1] b^2[0] + \frac{d^2}{2} \frac{d+2}{3} M^{1/2}[1] b^2[0] + \frac{1}{4} \frac{d+2}{3} b^{1/2}[1] b^2[0] \Big]$$

$$= \delta_{iq}\left[-\frac{d+2}{2} I^{1/2}[1]M^2[0] + I^{1/2}[1]M^2[2] + \frac{1}{4} I^{1/2}[3]M^2[0] + \frac{1}{2} M^{1/2}[1]M^2[0]\right]$$

$$+ a_2\,\delta_{iq}\Big[\frac{2+3d+d^2}{2} I^{1/2}[1]M^2[2] - \frac{3(d+2)}{4} I^{1/2}[1]M^2[4] + \frac{1}{2} I^{1/2}[1]M^2[6]$$

$$+ \frac{2+3d+d^2}{8} I^{1/2}[3]M^2[0] - \frac{3(d+2)}{8} I^{1/2}[3]M^2[0] + \frac{3}{8} I^{1/2}[3]M^2[4]$$

$$- \frac{3(d+2)}{64} I^{1/2}[5]M^2[0] + \frac{3}{32} I^{1/2}[5]M^2[2] + \frac{1}{128} I^{1/2}[7]M^2[0]$$

$$- d\,\frac{4(d+1)+d^2}{8} I^{1/2}[1]M^2[0] - \frac{1}{4} M^{1/2}[1]M^2[4] - \frac{1}{8} M^{1/2}[3]M^2[2]$$

$$- \frac{1}{64} M^{1/2}[5]M^2[0] - \frac{d}{8}(2+3d+d^2) M^{1/2}[1]M^2[0] + \frac{d(d+2)}{4} M^{1/2}[1]M^2[2]$$

$$+ \frac{d(d+2)}{16} M^{1/2}[3]M^2[0] + \frac{d+2}{3}\,\frac{-2+3d+2d^2}{4} M^{1/2}[1]b^2[0] - \frac{d+2}{6} M^{1/2}[1]b^2[2]$$

$$- \frac{d+2}{24} M^{1/2}[3]b^2[0] + \frac{d+2}{12} b^{1/2}[1]b^2[0]\Big] \qquad (37)$$

On a :

$$\int_{\mathbb{R}^d} dc_{11}|c_{11}|\, e^{-c_{12}^2/2}\int_{\mathbb{R}^d} dc\, e^{-2c^2} c_{12q} K_1^{c_{12q}} = -\frac{1}{2} M^{1/2}[1]I^2[0]\delta_{iq} + \frac{1}{2} M^{1/2}[1]I^2[2]\delta_{iq} + \frac{1}{8} M^{1/2}[3]I^2[0]\delta_{iq}$$

$$- \frac{d}{4} M^{1/2}[1]I^2[0]\delta_{iq} + M^{1/2}[1]M^2[0]\delta_{iq}$$

$$+ a_2\,\delta_{iq}\Big[\frac{1}{2} M^{1/2}[1]I^2[2] - \frac{3}{4} M^{1/2}[1]I^2[4] + \frac{1}{4} M^{1/2}[1]I^2[6] + \frac{1}{8} M^{1/2}[3]I^2[0]$$

$$- \frac{3}{8} M^{1/2}[3]I^2[2] + \frac{3}{16} M^{1/2}[3]I^2[4] - \frac{3}{64} M^{1/2}[5]I^2[0] + \frac{3}{64} M^{1/2}[5]I^2[2]$$

$$+ \frac{1}{256} M^{1/2}[7]I^2[0] - \frac{d}{4} M^{1/2}[1]I^2[0] + \frac{3d}{4} M^{1/2}[1]I^2[2] - \frac{3d}{8} M^{1/2}[1]I^2[4]$$

$$+ \frac{3d}{16} M^{1/2}[3]I^2[0] - \frac{3d}{16} M^{1/2}[3]I^2[2] - \frac{3d}{128} M^{1/2}[5]I^2[0] - \frac{d^2}{4} M^{1/2}[1]I^2[0]$$

$$+ \frac{d^2}{4} M^{1/2}[1]I^2[2] + \frac{d^2}{16} M^{1/2}[3]I^2[0] - \frac{d^3}{16} M^{1/2}[1]I^2[0] - \frac{1}{2} M^{1/2}[1]M^2[4]$$

$$- \frac{1}{4} M^{1/2}[3]M^2[2] - \frac{1}{32} M^{1/2}[5]M^2[0] - \frac{d}{2} M^{1/2}[1]M^2[0] + d\, M^{1/2}[1]M^2[2]$$

$$+ \frac{d}{4} M^{1/2}[3]M^2[0] - \frac{3d^2}{4} M^{1/2}[1]M^2[0] + \frac{d^2}{2} M^{1/2}[1]M^2[2] + \frac{d^2}{8} M^{1/2}[3]M^2[0]$$

$$- \frac{d^3}{4} M^{1/2}[1]M^2[0] + \frac{1}{4}\frac{d+2}{3} b^{1/2}[1]M^2[0] - \frac{1}{4}\frac{d+2}{3} b^{1/2}[1]M^2[2] - \frac{1}{16}\frac{d+2}{3} b^{1/2}[3]M^2[0]$$

$$+ \frac{3d}{8}\frac{d+2}{3} b^{1/2}[1]M^2[0] + \frac{d^2}{4}\frac{d+2}{3} b^{1/2}[1]M^2[0] + \frac{1}{2}\frac{d+2}{3} b^{1/2}[1]b^2[0]\Big]$$

$$= \delta_{iq}\left[-\frac{d+2}{4} M^{1/2}[1]I^2[0] + \frac{1}{2} M^{1/2}[1]I^2[2] + \frac{1}{8} M^{1/2}[3]I^2[0] + M^{1/2}[1]M^2[0]\right]$$

$$+ a_2\,\delta_{iq}\Big[\frac{2+3d+d^2}{4} M^{1/2}[1]I^2[2] - \frac{3(d+2)}{8} M^{1/2}[1]I^2[4] + \frac{1}{4} M^{1/2}[1]I^2[6] + \frac{2+3d+d^2}{16} M^{1/2}[3]I^2[0]$$

$$- \frac{3(d+2)}{16} M^{1/2}[3]I^2[2] + \frac{3}{16} M^{1/2}[3]I^2[4] - \frac{3(d+2)}{128} M^{1/2}[5]I^2[0] + \frac{3}{64} M^{1/2}[5]I^2[2]$$

$$+ \frac{1}{256} M^{1/2}[7]I^2[0] - d\,\frac{4(d+1)+d^2}{16} M^{1/2}[1]I^2[0] - \frac{1}{2} M^{1/2}[1]M^2[4] - \frac{1}{4} M^{1/2}[3]M^2[2]$$

$$- \frac{1}{32} M^{1/2}[5]M^2[0] - \frac{d}{4}(2+3d+d^2) M^{1/2}[1]M^2[0] + \frac{d(d+2)}{2} M^{1/2}[1]M^2[2] + \frac{d(d+2)}{8} M^{1/2}[3]M^2[0]$$

$$+ \frac{d+2}{3}\,\frac{-2+3d+2d^2}{8} b^{1/2}[1]M^2[0] - \frac{d+2}{12} b^{1/2}[1]M^2[2] - \frac{d+2}{48} b^{1/2}[3]M^2[0] + \frac{d+2}{6} b^{1/2}[1]b^2[0]\Big]$$

(38)

On évalue les expressions (35) à (38) avec un logiciel de calcul symbolique, ce qui donne des expressions simplifiées pour ces intégrales (cf. Mathematica). Combinant ces expressions aux relations (20) à (29) on trouve (cf. Mathematica) :

- $(A,B) = (1,1)$:

$$I_2 = 0 \tag{39}$$

- $(A,B) = (V_2^2, 1)$:

$$I_2 = V_T^2 \frac{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)}{\Gamma(d/2)} \frac{\pi^d}{\sqrt{2}} \frac{d+1}{2d}\left[-\frac{d-1}{d} - a_2 \frac{-70-d+26d^2+6d^3}{16}\right] \tag{40}$$

- $(A,B) = (1, V_1^2)$:

$$I_2 = V_T^2 \frac{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)}{\Gamma(d/2)} \frac{\pi^d}{\sqrt{2}} \frac{d+1}{2d}\left[+\frac{d-1}{d} + a_2 \frac{-70-d+26d^2+6d^3}{16}\right] \tag{41}$$

$$I_2^{(V_2^2,1)} + I_2^{(1,V_1^2)} = 0$$

- $(A,B) = (V_2, 1)$:

$$I_1 = V_T \frac{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)}{\Gamma(d/2)} \frac{\pi^d}{\sqrt{2}} \left(\ldots\right) \tag{42}$$

- $(A,B) = (1, V_1)$:

$$I_1 = V_T \frac{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)}{\Gamma(d/2)} \frac{\pi^d}{\sqrt{2}} \left(\ldots\right) \tag{43}$$

On obtient ainsi tous les $\omega[Af^{(0)}, Bf^{(1)}]$ par insertion des relations (39) à (43) dans (56).
Les taux de déclin sont ensuite donnés par les Eqs. (436) à (438), ce qui donne:

$$\xi_n^{(1)} = \frac{2}{n}\omega[f^{(0)}, f^{(1)}]$$

$$= -\frac{2}{n}\frac{\Gamma(d/2)}{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)} n \frac{d+2}{4\pi^d}\left[\frac{d}{\sqrt{2}(d-1)} V_T\left(\kappa^* \frac{1}{T}\nabla_i T + \mu^* \frac{1}{n}\nabla_i n\right) I_1 + \sqrt{2}\, \eta^* \nabla_j u_i\, I_2\right]$$

$$\boxed{\xi_n^{(1)} = 0} \tag{44}$$

Les autres taux s'obtiennent avec un logiciel de calcul symbolique :

$$\xi_{u_i}^{(1)} = \frac{1}{nV_T}\omega[f^{(0)}, V_i f^{(1)}] + \frac{1}{nV_T}\omega[V_i f^{(0)}, f^{(1)}]$$

$$\boxed{\xi_{u_i}^{(1)} = -V_T\left(\kappa^* \frac{1}{T}\nabla_i T + \mu^* \frac{1}{n}\nabla_i n\right)\frac{(d+2)^2}{32(d-1)}\left[1 + a_2 \frac{-86-101d+32d^2+88d^3+28d^4}{32(d+2)}\right]} \tag{45}$$

$$\xi_T^{(1)} = -\xi_n^{(1)} + \frac{m}{nk_B T d}\omega[f^{(0)}, V^2 f^{(1)}] + \frac{m}{nk_B T d}\omega[V^2 f^{(0)}, f^{(1)}]$$

$$\boxed{\xi_T^{(1)} = 0} \tag{46}$$

Stabilité hydrodynamique de l'annihilation balistique probabiliste

Nous avons déjà obtenu un ensemble de relations fermées pour les champs hydrodynamiques. Nous allons ici étudier la stabilité linéaire des solutions autour de l'état de refroidissement homogène (HCS: "Homogeneous Cooling State"). Des simulations de dynamique moléculaire [1-3] (articles) ainsi que de Monte-Carlo de l'Eq. de Boltzmann [8] (art. b) ont montré que la solution HCS est instable pour le gaz inélastique: il y a formation spontanée de clusters de haute densité. Qu'en est-il du gaz élastique? Qu'en est-il de la dynamique d'annihilation? Références? Notre étude doit permettre de répondre à toutes ces questions, ainsi que de la stabilité lorsqu'il y a "compétition" entre annihilation et chocs élastiques.

La solution homogène (à l'ordre zéro) de la fonction de distribution, $f^{(0)}$, est connue et a été publiée dans notre premier article. Ensuite vient la détermination des champs hydrodynamiques à cet ordre. On a:

$$\begin{cases} \partial_t n = -p n \xi_n^{(0)}, \\ \partial_t u_i = -p V_T \xi_{u_i}^{(0)}, \quad i = 1, \dots, d, \\ \partial_t T = -p T \xi_T^{(0)}, \end{cases} \tag{1}$$

avec:

$$\xi_n^{(0)} = \xi_n^{(0)*} \nu_0 \quad ; \quad \xi_n^{(0)*} = \frac{d+2}{4}\left(1 - a_2 \frac{1}{16}\right) \tag{2}$$

$$\xi_T^{(0)} = \xi_T^{(0)*} \nu_0 \quad ; \quad \xi_T^{(0)*} = \frac{d+2}{8}\left(2d - 1 + a_2 \frac{6d+13}{16}\right) \tag{3}$$

$$\nu_0 = \frac{p^{(0)}}{\eta_0} \quad ; \quad p^{(0)} = n k_B T \; ; \quad \eta_0 = \frac{d+2}{8} \frac{\Gamma(d/2)}{\pi^{(d-1)/2}} \frac{\sqrt{m k_B T}}{\sigma^{d-1}}$$

$$\nu_0 = n k_B T \frac{8}{d+2} \frac{\pi^{(d-1)/2}}{\Gamma(d/2)} \frac{\sigma^{d-1}}{\sqrt{m k_B T}} = \frac{8}{d+2} \frac{\pi^{(d-1)/2}}{\Gamma(d/2)} \sigma^{d-1} \sqrt{\frac{k_B}{m}}\, n T^{1/2} := a n T^{1/2} \tag{4}$$

La résolution du système (1) n'est plus aussi directe que dans le cas du gaz inélastique. En effet, à présent la densité n'est plus constante, et sa décroissance est liée à celle de la température. Pour le gaz inélastique, on avait [Brey] $\partial_t T = -T \xi_T^{(0)}$, où $\xi_T^{(0)} \sim n T^{1/2}$. La solution était $T(t) = T_0 (1 + t/t_0)^{-2}$, $t_0 = \xi_T^{(0)}(0)/2$. Or dans notre cas, on a $\underline{u}(t) = \underline{u}_0$, et les autres Eqs. de (1) donnent:

$$\begin{cases} \partial_t n = -n^2 T^{1/2} a_n, \\ \partial_t T = -n T^{3/2} a_T, \end{cases} \tag{5}$$

avec:

$$\begin{cases} a_n = \xi_n^{(0)*} p a, \\ a_T = \xi_T^{(0)*} p a. \end{cases} \tag{6}$$

Il est possible de résoudre analytiquement ce système de 2 équations différentielles non linéaires du premier ordre. On peut deviner une solution de la forme:

$$\begin{cases} n(t) = c_1 (1 + c_2 t)^{\gamma_1}, & n'(t) = c_1 \gamma_1 c_2 (1 + c_2 t)^{\gamma_1 - 1}, \\ T(t) = c_3 (1 + c_4 t)^{\gamma_2}, & T'(t) = c_3 \gamma_2 c_4 (1 + c_4 t)^{\gamma_2 - 1}, \end{cases} \tag{7}$$

que l'on insère dans les Eqs. (5) pour obtenir:

$$\begin{aligned} c_1 \gamma_1 c_2 (1+c_2 t)^{\gamma_1 - 1} &= -c_1^2 (1+c_2 t)^{\gamma_1 \cdot 2} \sqrt{c_3} (1+c_4 t)^{\gamma_2/2} a_n, \\ c_3 \gamma_2 c_4 (1+c_4 t)^{\gamma_2 - 1} &= -c_1 (1+c_2 t)^{\gamma_1} c_3^{3/2} (1+c_4 t)^{\gamma_2 \frac{3}{2}} a_T. \end{aligned} \tag{8}$$

Pour qu'une solution de la forme (7) existe, il faudrait soit que les exposants satisfassent $\gamma_1 - 1 = 2\gamma_1$; $\gamma_2 = 0$; $\gamma_2 - 1 = \gamma_2 \cdot 3/2$; $\gamma_1 = 0$ (ce qui est absurde), ou que $c_2 = c_4 := c$. Dans ce dernier cas, on obtient:

$$\begin{aligned} c_1 c \gamma_1 (1+ct)^{\gamma_1 - 1} &= -c_1^2 (1+ct)^{2\gamma_1} \sqrt{c_3} (1+ct)^{\gamma_2/2} a_n, \\ c_3 c \gamma_2 (1+ct)^{\gamma_2 - 1} &= -c_1 (1+ct)^{\gamma_1} c_3^{3/2} (1+ct)^{\gamma_2 3/2} a_T. \end{aligned}$$

Les exposants doivent satisfaire:

$$\left.\begin{aligned} \gamma_1 - 1 &= 2\gamma_1 + \tfrac{1}{2}\gamma_2 \implies \gamma_1 + \tfrac{1}{2}\gamma_2 = -1 \\ \gamma_2 - 1 &= \gamma_1 + \tfrac{3}{2}\gamma_2 \implies \gamma_1 + \tfrac{1}{2}\gamma_2 = -1 \end{aligned}\right\} \implies \gamma_1 = -1 - \tfrac{1}{2}\gamma_2 \tag{9}$$

Les coefficients doivent satisfaire:

$$\begin{aligned} c_1 c \gamma_1 &= -c_1^2 \sqrt{c_3}\, a_n \implies \gamma_1 = -a_n \frac{c_1}{c} \sqrt{c_3} \\ c_3 c \gamma_2 &= -c_1 c_3^{3/2} a_T \implies \gamma_2 = -a_T \frac{c_1}{c} \sqrt{c_3} \end{aligned} \tag{10}$$

On résout ces Eqs. pour γ_2 et c:

$$\left.\begin{aligned} -1-\tfrac{1}{2}\gamma_2 &= -a_n \tfrac{c_1}{c}\sqrt{c_3} \\ \gamma_2 &= -a_T \tfrac{c_1}{c}\sqrt{c_3} \end{aligned}\right\} \Rightarrow -1-\tfrac{1}{2}\left(-a_T \tfrac{c_1}{c}\sqrt{c_3}\right) = -a_n \tfrac{c_1}{c}\sqrt{c_3}$$

$$\Rightarrow 1-\tfrac{1}{2}a_T\tfrac{c_1}{c}\sqrt{c_3} = a_n\tfrac{c_1}{c}\sqrt{c_3}$$

$$\Rightarrow \tfrac{1}{c}\left[a_n c_1\sqrt{c_3}+\tfrac{1}{2}a_T c_1\sqrt{c_3}\right] = 1$$

$$\Rightarrow c = c_1\sqrt{c_3}\,(a_n + a_T/2) \qquad (11)$$

Donc:

$$\gamma_2 = -a_T \frac{c_1\sqrt{c_3}}{c_1\sqrt{c_3}(a_n+a_T/2)} = -\frac{2a_T}{2a_n+a_T} \qquad (12)$$

Utilisant l'Eq.(9) :

$$\gamma_1 = -1-\tfrac{1}{2}\gamma_2 = \frac{-2a_n-a_T}{2a_n+a_T} + \frac{a_T}{2a_n+a_T} = -\frac{2a_n}{2a_n+a_T} \qquad (13)$$

Les constantes c_1 et c_3 se trouvent à l'aide des conditions initiales:

$$n(0)=n_0 \Rightarrow c_1 = n_0$$
$$T(0)=T_0 \Rightarrow c_3 = T_0 \qquad (14)$$

Or on sait aussi que:

$$\xi_n^{(0)} = \xi_n^{(0)*} p\, a\, n T^{1/2} \;;\; \xi_n^{(0)}(0) = \xi_n^{(0)*} p\, a\, n_0 T_0^{1/2} = a_n\, n_0 T_0^{1/2}$$
$$\xi_T^{(0)} = \xi_T^{(0)*} p\, a\, n T^{1/2} \;;\; \xi_T^{(0)}(0) = \xi_T^{(0)*} p\, a\, n_0 T_0^{1/2} = a_T\, n_0 T_0^{1/2} \qquad (15)$$

Ainsi:

$$c = n_0 T_0^{1/2} a_n + n_0 T_0^{1/2} a_T/2 = p\left[\xi_n^{(0)}(0) + \xi_T^{(0)}(0)/2\right] := p t_0^{-1} \qquad (16)$$

En résumé, on a:

$$\boxed{\begin{aligned} n(t) &= n_0\left(1+p\tfrac{t}{t_0}\right)^{\gamma_n} \;;\; \gamma_n = -\xi_n^{(0)}(0)\, t_0 \;;\; t_0^{-1} = \xi_n^{(0)}(0) + \xi_T^{(0)}(0)/2 \\ T(t) &= T_0\left(1+p\tfrac{t}{t_0}\right)^{\gamma_T} \;;\; \gamma_T = -\xi_T^{(0)}(0)\, t_0 \end{aligned}} \qquad (17)$$

Les exposants de déclin sont indépendants de la probabilité d'annihilation. Dans la limite $p\to 0$, on a bien $n(t)=n_0$ et $T(t)=T_0$, $\forall t$. Les grandeurs t_0, $\xi_n^{(0)}(0)$, et $\xi_T^{(0)}(0)$ peuvent être déterminées au premier ordre en a_2 car on a établi les expressions à cet ordre de $\xi_n^{(0)*}$ et $\xi_T^{(0)*}$.

Linéarisation des Eqs de Navier-Stokes

La linéarisation des Eqs. autour de l'état de refroidissement homogène engendre un système d'Equations différentielles aux dérivées partielles dont les coefficients sont indépendants de l'espace, mais dépendent du temps. Cette dépendance temporelle peut être éliminée par un changement de variables spatiales et temporelles, ainsi qu'un changement d'échelle des champs hydrodynamiques. Soit $Y \in \{n, u_i, T\}$ le champ considéré, $Y_H(t)$ la solution correspondante par l'état homogène, $Y(\underline{r},t)$ la déviation par rapport à l'état homogène, alors:

$$\delta Y(\underline{r},t) = Y(\underline{r},t) - Y_H(t) \tag{1}$$

On va utiliser les nouveaux champs hydrodynamiques sans dimension en représentation de Fourier:

$$\delta Y_{\underline{k}}(\tau) = \int d\underline{\ell}\, e^{-i\underline{k}\cdot\underline{\ell}}\, \delta Y(\underline{\ell},t), \tag{2}$$

où $\underline{\ell}$ et τ sont les variables sans dimension d'espace et de temps définies par:

$$\underline{\ell} = \frac{V_H(t)}{2}\sqrt{\frac{m}{k_B T_H(t)}}\, \underline{r} \quad \Rightarrow \frac{\partial}{\partial r_i} = \frac{\partial \ell_j}{\partial r_i}\frac{\partial}{\partial \ell_j} = \left(\frac{\partial}{\partial r_i}\frac{V_H(t)}{2}\sqrt{\frac{m}{k_B T_H}}\, \underline{r}\right)\frac{\partial}{\partial \ell_j} = \frac{V_H}{2}\sqrt{\frac{m}{k_B T_H}}\frac{\partial}{\partial \ell_i} \tag{3}$$

$$\tau = \frac{1}{2}\int_0^t dt'\, V_H(t'), \quad \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial \tau}{\partial t}\frac{\partial}{\partial \tau} = \left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{2}\int_0^t dt' V_H(t')\right)\frac{\partial}{\partial \tau} = \frac{1}{2}V_H(t)\frac{\partial}{\partial \tau} \tag{4}$$

où l'indice H signifie que la grandeur est évaluée dans l'état homogène, c'est-à-dire avec la solution à l'ordre zéro trouvée précédemment. On a ainsi:

$$\rho_{\underline{k}}(\tau) = \frac{\delta n_{\underline{k}}(\tau)}{n_H(t)}, \tag{5}$$

$$\underline{W}_{\underline{k}}(\tau) = \sqrt{\frac{m}{k_B T_H(t)}}\, \delta \underline{u}_{\underline{k}}(\tau), \tag{6}$$

$$\theta_{\underline{k}}(\tau) = \frac{\delta T_{\underline{k}}(\tau)}{T_H(t)}. \tag{7}$$

Densité:

$$\partial_t n + \nabla_i (n u_i) = -p\, n\, \zeta_n^{(0)}$$

$$\Rightarrow \partial_t(\delta n + n_H) + \nabla_i\left[(\delta n + n_H)(\delta u_i + \underbrace{u_{iH}}_{=0})\right] = -p\,(\delta n + n_H)\,\zeta_n^{(0)}$$

$$\Rightarrow \partial_t \delta n + \partial_t n_H + \nabla_i(\underbrace{\delta n\, \delta u_i}_{=O(\delta^2)} + n_H \delta u_i) = -p\,\delta n\,\zeta_n^{(0)} - p\, n_H\, \zeta_n^{(0)} \quad ; \ \zeta_n^{(0)} = V_0\, \zeta_n^{(0)*}$$

$$\Rightarrow \partial_t \delta n + \underbrace{\partial_t n_H}_{= -p n_H \zeta_n^{(0)} = -p n_H V_{0H} \zeta_n^{(0)*}} + n_H \nabla_i \delta u_i = -p\,\delta n\, V_{0H}\, \zeta_n^{(0)*} - p\, n_H\, V_0\, \zeta_n^{(0)*}$$

$$\Rightarrow \partial_t \underbrace{\int d\underline{\ell}\, e^{-i\underline{k}\cdot\underline{\ell}}\,\delta n}_{=\delta n_{\underline{k}}(\tau)} - p\, n_H\, V_{0H}\, \zeta_n^{(0)*}\int d\underline{\ell}\, e^{-i\underline{k}\cdot\underline{\ell}} + n_H \int d\underline{\ell}\, e^{-i\underline{k}\cdot\underline{\ell}}\, \nabla_i \delta u_i = -p\, V_{0H}\, \zeta_n^{(0)*}\overbrace{\int d\underline{\ell}\, e^{-i\underline{k}\cdot\underline{\ell}}\, \delta n}^{=\delta n_{\underline{k}}(\tau)} - p\, n_H\, \zeta_n^{(0)*}\int d\underline{\ell}\, e^{-i\underline{k}\cdot\underline{\ell}}\, V_0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}V_H\, \partial_\tau \delta n_{\underline{k}}(\tau) - p\, n_H\, V_{0H}\, \zeta_n^{(0)*}\int d\underline{\ell}\, e^{-i\underline{k}\cdot\underline{\ell}} + n_H \frac{1}{2}V_H\sqrt{\frac{m}{k_B T_H}}\underbrace{\int d\underline{\ell}\, e^{-i\underline{k}\cdot\underline{\ell}}\, \nabla_{\ell_i} \delta u_i}_{\overset{\text{partiel}}{=} i k_i \int d\underline{\ell}\, e^{-i\underline{k}\cdot\underline{\ell}}\,\delta u_i + e^{-i\underline{k}\cdot\underline{\ell}}\,\delta u_i|_{\partial\Omega} = 0 :\ \text{cond. bords.}} = -p\, V_{0H}\,\zeta_n^{(0)}\, \delta n_{\underline{k}}(\tau) - p\, n_H\, \zeta_n^{(0)*}\int d\underline{\ell}\, e^{-i\underline{k}\cdot\underline{\ell}}\, V_0$$

$$\Rightarrow \partial_\tau \delta n_{\underline{k}}(\tau) - p\, n_H\, 2\zeta_n^{(0)*}\int d\underline{\ell}\, e^{-i\underline{k}\cdot\underline{\ell}} + n_H\, i k_i \underbrace{\sqrt{\frac{m}{k_B T_H}}\,\delta u_{\underline{k}i}(\tau)}_{=W_{\underline{k}i}(\tau)} = -p\, 2\zeta_n^{(0)*}\,\delta n_{\underline{k}}(\tau) - p\, 2\frac{n_H}{V_{0H}}\int d\underline{\ell}\, e^{-i\underline{k}\cdot\underline{\ell}}\, V_0\, \zeta_n^{(0)*}$$

$$\Rightarrow \partial_\tau n_{\underline{k}}(\tau) - p\, n_H 2\zeta_n^{(0)*}\int d\underline{\ell}\, e^{-i\underline{k}\cdot\underline{\ell}} + i\, n_H \underbrace{\underline{k}\cdot\underline{W}_{\underline{k}}(\tau)}_{= k W_{\underline{k}\parallel}(\tau)} = -2p\zeta_n^{(0)*}\,\delta n_{\underline{k}}(\tau) - 2p\frac{n_H}{V_{0H}}\int d\underline{\ell}\, e^{-i\underline{k}\cdot\underline{\ell}}\, V_0\ \zeta_n^{(0)*}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n_H}\partial_\tau n_{\underline{k}}(\tau) - p\, 2\zeta_n^{(0)*}\int d\underline{\ell}\, e^{-i\underline{k}\cdot\underline{\ell}} + i k W_{\underline{k}\parallel}(\tau) = -2p\,\zeta_n^{(0)*}\underbrace{\frac{\delta n_{\underline{k}}(\tau)}{n_H}}_{=\rho_{\underline{k}}(\tau)} - \frac{2p\,\zeta_n^{(0)*}}{V_{0H}}\int d\underline{\ell}\, e^{-i\underline{k}\cdot\underline{\ell}}\ V_0 \tag{8}$$

Or en constatant que : ②

$$\partial_\tau \rho_{\underline{k}}(\tau) = \frac{1}{n_H}\partial_\tau n_{\underline{k}}(\tau) + n_{\underline{k}}(\tau)\left(-\frac{1}{n_H^2}\right)\partial_\tau n_H = \frac{1}{n_H}\partial_\tau n_{\underline{k}}(\tau) - \rho_{\underline{k}}(\tau)\frac{1}{n_H}\frac{2}{V_{H0}}\partial_t n_H(\tau)$$

$$= \frac{1}{n_H}\partial_\tau n_{\underline{k}}(\tau) - \rho_{\underline{k}}(\tau)\frac{1}{n_H}\frac{2}{V_{H0}}\underbrace{\left[-p\, n_H\, \zeta_n^{(0)}\right]}_{= -p\, n_H V_{0H}\zeta_n^{(0)*}}$$

$$= \frac{1}{n_H}\partial_\tau n_{\underline{k}}(\tau) + \rho_{\underline{k}}(\tau)\frac{1}{n_H}\frac{2}{V_{H0}}\, p\, n_H V_{0H}\,\zeta_n^{(0)*}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n_H}\partial_\tau n_{\underline{k}}(\tau) = \partial_\tau \rho_{\underline{k}}(\tau) - 2p\,\rho_{\underline{k}}(\tau)\,\zeta_n^{(0)*} \qquad (9)$$

(9) dans (8) donne :

$$\partial_\tau \rho_{\underline{k}}(\tau) - 2p\,\zeta_n^{(0)*}\rho_{\underline{k}}(\tau) - 2p\,\zeta_n^{(0)*}\int d\underline{e}\, e^{-i\underline{k}\cdot\underline{e}} + ikW_{k\parallel}(\tau) = -2p\,\zeta_n^{(0)*}\rho_{\underline{k}}(\tau) - \frac{2p\zeta_n^{(0)*}}{V_{0H}}\int de\, e^{-i\underline{k}\cdot\underline{e}}\, V_0 . \quad (10)$$

Or on a :

$$-\frac{2p\zeta_n^{(0)*}}{V_{0H}}\int de\, e^{-i\underline{k}\cdot\underline{e}}\, V_0 = -\frac{2p\zeta_n^{(0)*}}{V_{0H}}\int de\, e^{-i\underline{k}\cdot\underline{e}}\underbrace{\left[n k_B T\,\frac{8}{d+2}\,\frac{\pi^{(d-1)/2}}{\Gamma(d/2)}\,\frac{\sigma^{d-1}}{\sqrt{m k_B T}}\right]}_{\doteq\, a\, n\, T^{1/2}}$$

$$= -\frac{2p\zeta_n^{(0)*}}{V_{0H}}\underbrace{a\, n_H T_H^{1/2}}_{=V_{0H}}\frac{1}{n_H T_H^{1/2}}\int de\, e^{-i\underline{k}\cdot\underline{e}}\,(\delta n + n_H)(\delta T + T_H)^{1/2}$$

$$= -2p\zeta_n^{(0)*}\frac{1}{n_H T_H^{1/2}}\int de\, e^{-i\underline{k}\cdot\underline{e}}\, n_H T_H^{1/2}\left(\frac{\delta n}{n_H}+1\right)\underbrace{\left(\frac{\delta T}{T_H}+1\right)^{1/2}}_{= 1+\frac{1}{2}\frac{\delta T}{T_H}+O(\delta^2)}$$

$$= -2p\zeta_n^{(0)*}\int de\, e^{-i\underline{k}\cdot\underline{e}}\left[1+\frac{\delta n}{n_H}+\frac{1}{2}\frac{\delta T}{T_H}\right]$$

$$= -2p\,\zeta_n^{(0)*}\left[\int de\, e^{-i\underline{k}\cdot\underline{e}} + \int de\, e^{-i\underline{k}\cdot\underline{e}}\frac{\delta n}{n_H} + \frac{1}{2}\int de\, e^{-i\underline{k}\cdot\underline{e}}\frac{\delta T}{T_H}\right]$$

$$= -2p\,\zeta_n^{(0)*}\int de\, e^{-i\underline{k}\cdot\underline{e}} - 2p\,\zeta_n^{(0)*}\rho_{\underline{k}}(\tau) - p\,\zeta_n^{(0)*}\theta_{\underline{k}}(\tau) \qquad (10)$$

(10) dans (9) donne :

$$\partial_\tau \rho_{\underline{k}}(\tau) - 2p\,\zeta_n^{(0)*}\int de\, e^{-i\underline{k}\cdot\underline{e}} + ikW_{k\parallel}(\tau) = -2p\,\zeta_n^{(0)*}\int de\, e^{-i\underline{k}\cdot\underline{e}} - 2p\,\zeta_n^{(0)*}\rho_{\underline{k}}(\tau) - p\,\zeta_n^{(0)*}\theta_{\underline{k}}(\tau)$$

$$\Rightarrow \boxed{\left[\partial_\tau + 2p\,\zeta_n^{(0)*}\right]\rho_{\underline{k}}(\tau) + p\,\zeta_n^{(0)*}\theta_{\underline{k}}(\tau) + ikW_{k\parallel}(\tau) = 0} \qquad (11)$$

A nouveau, dans la limite $p \to 0$ on retrouve bien le résultat de Brey & Al. On remarque que la densité est à présent explicitement couplée à la température (et non plus seulement au champ de vitesse).

Impulsion:

$$\partial_t u_i + u_j\nabla_j u_i + \frac{1}{mn}\nabla_j P_{ij} = -p\,V_T\,\xi_{u_i}^{(1)} \quad ; \quad P_{ij} = p\delta_{ij} - \eta\left(\nabla_i u_j + \nabla_j u_i - \frac{2}{d}\delta_{ij}\nabla_n u_n\right)$$

$$\Rightarrow \partial_t u_i + \underbrace{u_j\nabla_j u_i}_{=0} + \frac{1}{mn}\nabla_i p - \frac{1}{mn}\nabla_j\left[\eta\left(\nabla_i u_j + \nabla_j u_i - \frac{2}{d}\delta_{ij}\nabla_n u_n\right)\right] = -p\,V_T\,\xi_{u_i}^{(1)} \quad ; \quad V_T = \sqrt{\frac{2k_BT}{m}}$$

$$\Rightarrow \partial_t(\delta u_i + \underbrace{u_{iH}}_{=0}) + \underbrace{(\delta u_i + u_{iH})\nabla_j(\delta u_i + u_{iH})}_{=O(\delta^2)} + \frac{1}{mn}\nabla_i(n k_B T)$$

$$-\frac{1}{mn}\nabla_j\left[\eta_0\eta^*\left(\nabla_i\delta u_j + \nabla_j\delta u_i - \frac{2}{d}\delta_{ij}\nabla_n\delta u_n\right)\right] = -p\sqrt{\frac{2k_B}{m}}\,(\delta T + T_H)^{1/2}\,\xi_{u_i}^{(1)} \qquad (12)$$

Attention, car ici $\xi_{u_i}^{(1)}$ a une forme compliquée qui fait intervenir les champs hydrodynamiques. Il faudra donc aussi linéariser ce coefficient (similaire à ce qui a été fait par Brey pour $\xi^{(2)}$). L'Eq. (12) s'écrit:

$$\partial_t\delta u_i + \frac{k_B}{mn}\nabla_i\Big[\underbrace{(\delta n + n_H)(\delta T + T_H)}_{=\underbrace{\delta n\,\delta T}_{=O(\delta^2)} + n_H\delta T + T_H\delta n + n_H T_H}\Big] - \underbrace{\frac{1}{m(\delta n + n_H)}}_{\text{donc ceci doit être de l'ordre } O(\delta^0) \text{ pour au global avoir } O(\delta^1)}\nabla_j\Big[\eta_0\eta^*\underbrace{\left(\nabla_i\delta u_j + \nabla_j\delta u_i - \frac{2}{d}\delta_{ij}\nabla_n\delta u_n\right)}_{=O(\delta)}\Big]$$

$$= -p\,V_T\,\xi_{u_i}^{(1)}$$

$$\Rightarrow \partial_t\delta u_i + \frac{k_B}{m}\underbrace{\frac{1}{\delta n + n_H}}_{=\frac{1}{n_H}\frac{1}{1+\frac{\delta n}{n_H}} \simeq \frac{1}{n_H}\left(1 - \frac{\delta n}{n_H}\right)}\nabla_i(n_H\delta T + T_H\delta n) - \frac{1}{m}\frac{1}{\delta n + n_H}\nabla_j\left[\eta_{0H}\eta^*\left(\nabla_i\delta u_j + \nabla_j\delta u_i - \frac{2}{d}\delta_{ij}\nabla_n\delta u_n\right)\right] = -p\,V_T\,\xi_{u_i}^{(1)}$$

$$\Rightarrow \partial_t\delta u_i + \frac{k_B}{m}\nabla_i\delta T + \frac{k_B}{m}T_H\nabla_i\frac{\delta n}{n_H} - \frac{1}{mn_H}\nabla_j\left[\eta_{0H}\eta^*\left(\nabla_i\delta u_j + \nabla_j\delta u_i - \frac{2}{d}\delta_{ij}\nabla_n\delta u_n\right)\right] = -p\,V_T\,\xi_{u_i}^{(1)}$$

$$\Rightarrow \cancel{\tfrac{1}{2}\nu_H}\,\partial_\tau\delta u_i + \frac{k_B}{m}\cancel{\tfrac{1}{2}\nu_H}\sqrt{\frac{m}{k_BT_H}}\nabla_{e_i}\delta T + \frac{k_B}{m}T_H\cancel{\tfrac{1}{2}\nu_H}\sqrt{\frac{m}{k_BT_H}}\nabla_{e_i}\frac{\delta n}{n_H}$$

$$-\frac{1}{mn_H}\cancel{\tfrac{1}{2}\nu_H}\sqrt{\frac{m}{k_BT_H}}\nabla_{e_j}\left[\eta_{0H}\eta^*\frac{1}{2}\nu_H\sqrt{\frac{m}{k_BT_H}}\left(\nabla_{e_i}\delta u_j + \nabla_{e_j}\delta u_i - \frac{2}{d}\delta_{ij}\nabla_{e_n}\delta u_n\right)\right] = -p\,V_T\,\xi_{u_i}^{(1)}, \qquad (13)$$

avec:

$$\eta_{0H}\frac{1}{2}\nu_H\sqrt{\frac{m}{k_BT_H}} = \cancel{\eta_{0H}}\frac{1}{2}\frac{p^{(0)}}{\cancel{\eta_{0H}}}\sqrt{\frac{m}{k_BT_H}} = \frac{1}{2}n_Hk_BT_H\sqrt{\frac{m}{k_BT_H}} = \frac{1}{2}n_H\sqrt{mk_BT_H}, \qquad (14)$$

donc (13) devient:

$$\partial_\tau\delta u_i + \frac{k_B}{m}\sqrt{\frac{m}{k_BT_H}}\nabla_{e_i}\delta T + \frac{k_BT_H}{m}\sqrt{\frac{m}{k_BT_H}}\nabla_{e_i}\frac{\delta n}{n_H} - \frac{1}{\cancel{mn_H}}\sqrt{\frac{\cancel{m}}{\cancel{k_BT_H}}}\frac{1}{2}\cancel{n_H}\sqrt{\cancel{mk_BT_H}}\nabla_{e_j}\left[\eta^*\left(\nabla_{e_i}\delta u_j + \nabla_{e_j}\delta u_i - \frac{2}{d}\delta_{ij}\nabla_{e_n}\delta u_n\right)\right] = -p\,V_T\,\xi_{u_i}^{(1)}\frac{2}{\nu_H}$$

$$\Rightarrow \partial_\tau\delta u_i + \frac{k_B}{m}\sqrt{\frac{m}{k_BT_H}}\nabla_{e_i}\delta T + \sqrt{\frac{k_BT_H}{m}}\nabla_{e_i}\frac{\delta n}{n_H} - \frac{1}{2}\eta^*\nabla_{e_j}\left[\nabla_{e_i}\delta u_j + \nabla_{e_j}\delta u_i - \frac{2}{d}\delta_{ij}\nabla_{e_n}\delta u_n\right] = -p\,V_T\,\xi_{u_i}^{(1)}\frac{2}{\nu_H}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{m}{k_BT_H}}\partial_\tau\delta u_i + \frac{k_B}{m}\frac{m}{k_BT_H}\nabla_{e_i}\delta T + \nabla_{e_i}\frac{\delta n}{n_H} - \frac{1}{2}\eta^*\sqrt{\frac{m}{k_BT_H}}\nabla_{e_j}\left[\nabla_{e_i}\delta u_j + \nabla_{e_j}\delta u_i - \frac{2}{d}\delta_{ij}\nabla_{e_n}\delta u_n\right] = -p\,V_T\,\xi_{u_i}^{(1)}\sqrt{\frac{m}{k_BT_H}}\frac{2}{\nu_H} \qquad (15)$$

Passage en variables de Fourier:

$$\sqrt{\frac{m}{k_BT_H}}\partial_\tau\int d\ell\, e^{-i\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\ell}}\delta u_i + \frac{1}{T_H}\int d\ell\, e^{-i\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\ell}}\nabla_{e_i}\delta T + \int d\ell\, e^{-i\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\ell}}\nabla_{e_i}\frac{\delta n}{n_H}$$

$$-\frac{1}{2}\eta^*\sqrt{\frac{m}{k_BT_H}}\int d\ell\, e^{-i\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\ell}}\nabla_{e_j}\left[\nabla_{e_i}\delta u_j + \nabla_{e_j}\delta u_i - \frac{2}{d}\delta_{ij}\nabla_{e_n}\delta u_n\right] = -p\left(\int d\ell\, e^{-i\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\ell}}V_T\,\xi_{u_i}^{(1)}\right)\sqrt{\frac{m}{k_BT_H}}\frac{2}{\nu_H}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{m}{k_BT_H}}\partial_\tau\delta u_{k_i}(\tau) + \frac{1}{T_H}ik_i\underbrace{\int d\ell\, e^{-i\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\ell}}\delta T}_{=\delta T_k(\tau)} + ik_i\underbrace{\int d\ell\, e^{-i\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\ell}}\frac{\delta n}{n_H}}_{=\rho_k(\tau)}$$

$$-\frac{\eta^*}{2}\sqrt{\frac{m}{k_BT_H}}\int d\ell\, e^{-i\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\ell}}\nabla_{e_j}\left[\nabla_{e_i}\delta u_j + \nabla_{e_j}\delta u_i - \frac{2}{d}\delta_{ij}\nabla_{e_n}\delta u_n\right] = -p\left(\int d\ell\, e^{-i\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\ell}}V_T\,\xi_{u_i}^{(1)}\right)\sqrt{\frac{m}{k_BT_H}}\frac{2}{\nu_H} \qquad (16)$$

Or on a que:

$$\partial_\tau\Big(\underbrace{\sqrt{\frac{m}{k_BT_H}}\delta u_{k_i}(\tau)}_{=W_{k_i}(\tau)}\Big) = \sqrt{\frac{m}{k_BT_H}}\partial_\tau\delta u_{k_i}(\tau) + \delta u_{k_i}(\tau)\,\partial_\tau\sqrt{\frac{m}{k_BT_H}}$$

$$= \sqrt{\frac{m}{k_BT_H}}\partial_\tau\delta u_{k_i}(\tau) + \underbrace{\delta u_{k_i}(\tau)\sqrt{\frac{m}{k_BT_H}}}_{=W_{k_i}(\tau)}\left(-\frac{1}{2}\right)\underbrace{\frac{1}{T_H}\partial_\tau T_H}_{=\frac{1}{T_H}\frac{2}{\nu_H}\partial_t T_H = \frac{1}{T_H}\frac{2}{\nu_H}\left(-pT_H\xi_T^{(1)}\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{m}{k_B T_H}}\, \partial_\tau \delta u_{ki}(\tau) + W_{ki}(\tau)\, \frac{1}{2}\, \frac{1}{T_H}\, \frac{2}{v_H}\, p\, T_H\, \xi_T^{(c)}$$

$$= \sqrt{\frac{m}{k_B T_H}}\, \partial_\tau \delta u_{ki}(\tau) + p\, W_{ki}(\tau)\, \xi_T^{(c)*}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{m}{k_B T_H}}\, \partial_\tau \delta u_{ki}(\tau) = \partial_\tau W_{ki}(\tau) - p\, W_{ki}(\tau)\, \xi_T^{(c)*} \qquad (17)$$

Utilisant (17) dans (16) il vient :

$$\partial_\tau W_{ki}(\tau) - p\, \xi_T^{(c)*} W_{ki}(\tau) + i k_i \Theta_{\underline{k}}(\tau) + i k_i \rho_{\underline{k}}(\tau)$$

$$- \frac{\eta^*}{2} \sqrt{\frac{m}{k_B T_H}} \int d\ell\, e^{-i\underline{k}\cdot\underline{\ell}}\, \underbrace{\nabla_{\ell_j}\left[\nabla_{\ell_i} \delta u_j + \nabla_{\ell_j} \delta u_i - \frac{2}{d}\delta_{ij} \nabla_{\ell_n} \delta u_n\right]}_{= \nabla_{\ell_j}\nabla_{\ell_i}\delta u_j + \nabla_{\ell_j}\nabla_{\ell_j}\delta u_i - \frac{2}{d}\nabla_{\ell_i}\nabla_{\ell_j}\delta u_j} = -p \sqrt{\frac{m}{k_B T_H}} \int d\ell\, e^{-i\underline{k}\cdot\underline{\ell}}\, V_T\, \xi_{ui}^{(1)}\, \frac{2}{v_H} \qquad (18)$$

Avec :

$$\nabla_{\ell_j}\nabla_{\ell_i}\delta u_i + \nabla_{\ell_j}\nabla_{\ell_j}\delta u_i - \frac{2}{d}\nabla_{\ell_i}\nabla_{\ell_j}\delta u_j = \underbrace{\left(1 - \frac{2}{d}\right)}_{= \frac{d-2}{d}} \nabla_{\ell_i}\nabla_{\ell_j}\delta u_j + \nabla_{\ell_j}\nabla_{\ell_j}\delta u_i, \qquad (19)$$

ainsi :

$$\partial_\tau W_{ki}(\tau) - p\, \xi_T^{(c)*} W_{ki}(\tau) + i k_i \Theta_{\underline{k}}(\tau) + i k_i \rho_{\underline{k}}(\tau)$$

$$- \frac{\eta^*}{2} \sqrt{\frac{m}{k_B T_H}} \underbrace{\int d\ell\, e^{-i\underline{k}\cdot\underline{\ell}}\, \nabla_{\ell_j}\nabla_{\ell_j}\delta u_i}_{\substack{\overset{\text{parties}}{=} i k_j \int d\ell\, e^{-i\underline{k}\cdot\underline{\ell}} \nabla_{\ell_j}\delta u_i \\ = i^2 k_j k_j \int d\ell\, e^{-i\underline{k}\cdot\underline{\ell}} \delta u_i \\ = -k^2 \delta u_{ki}(\tau)}} - \frac{\eta^*}{2} \sqrt{\frac{m}{k_B T_H}}\, \frac{d-2}{2} \underbrace{\int d\ell\, e^{-i\underline{k}\cdot\underline{\ell}}\, \nabla_{\ell_i}\nabla_{\ell_j}\delta u_j}_{\substack{= i k_i \int d\ell\, e^{-i\underline{k}\cdot\underline{\ell}} \nabla_{\ell_j}\delta u_j \\ = i^2 k_i k_j \int d\ell\, e^{-i\underline{k}\cdot\underline{\ell}} \delta u_j \\ = -k_i k_j \delta u_{kj}(\tau)}} = -p \sqrt{\frac{m}{k_B T_H}} \int d\ell\, e^{-i\underline{k}\cdot\underline{\ell}}\, V_T\, \xi_{ui}^{(1)}\, \frac{2}{v_H}$$

$$\Rightarrow \partial_\tau W_{ki}(\tau) - p\, \xi_T^{(c)*} W_{ki}(\tau) + i k_i \Theta_{\underline{k}}(\tau) + i k_i \rho_{\underline{k}}(\tau) + \frac{\eta^*}{2} k^2 \underbrace{\sqrt{\frac{m}{k_B T_H}}\, \delta u_{ki}(\tau)}_{= W_{ki}(\tau)} + \frac{\eta^*}{2}\, \frac{d-2}{d}\, k_i k_j \underbrace{\sqrt{\frac{m}{k_B T_H}}\, \delta u_{kj}(\tau)}_{= W_{kj}(\tau)} = -p \sqrt{\frac{m}{k_B T_H}} \int d\ell\, e^{-i\underline{k}\cdot\underline{\ell}}\, V_T\, \xi_{ui}^{(1)}\, \frac{2}{v_H}$$

$$\Rightarrow \partial_\tau W_{ki}(\tau) - p\, \xi_T^{(c)*} W_{ki}(\tau) + i k_i \Theta_{\underline{k}}(\tau) + i k_i \rho_{\underline{k}}(\tau) + \frac{\eta^*}{2}\left[k_j k_j W_{ki}(\tau) + \frac{d-2}{d} k_i k_j W_{kj}(\tau)\right] = -p \sqrt{\frac{m}{k_B T_H}} \int d\ell\, e^{-i\underline{k}\cdot\underline{\ell}}\, V_T\, \xi_{ui}^{(1)}\, \frac{2}{v_H} \qquad (20)$$

<u>Lemme</u> : soit $\underline{W}_{\underline{k}\perp}$ la composante perpendiculaire à $\underline{k}$, et $\underline{W}_{\underline{k}\parallel}$ la composante parallèle à $\underline{k}$, alors :

$$\hat{e}_i \left[k_j k_j W_{ki}(\tau) + \frac{d-2}{d} k_i k_j W_{kj}(\tau)\right] = k^2 \underline{W}_{\underline{k}\perp} + \frac{2(d-1)}{d} k^2 \underline{W}_{\underline{k}\parallel}. \qquad (21)$$

<u>Preuve</u> : notons $\underline{k} = k\hat{e}_k$, $\underline{W}_{\underline{k}} = \underline{W}_{\underline{k}\perp} + \underline{W}_{\underline{k}\parallel}$, $\underline{W}_{\underline{k}\parallel} = \underline{W}_{\underline{k}}\cdot\hat{e}_k$, $\underline{W}_{\underline{k}\perp} = \underline{W}_{\underline{k}} - \underline{W}_{\underline{k}\parallel}$, $|\underline{W}_{\underline{k}\parallel}| = W_{k\parallel}$, $|\underline{W}_{\underline{k}\perp}| = W_{k\perp}$.

On a alors :

$$\sum_{i=1}^{d} \hat{e}_i \left[k_i k_j W_{ki}(\tau) + \frac{d-2}{2} k_i k_j W_{kj}(\tau)\right] = \left(\sum_{j=1}^{d} k_j k_j\right)\left(\sum_{i=1}^{d} \hat{e}_i W_{ki}(\tau)\right) + \frac{d-2}{d}\left(\sum_{i=1}^{d} \hat{e}_i k_i\right)\left(\sum_{j=1}^{d} k_j W_{kj}(\tau)\right)$$

$$= k^2 \begin{pmatrix} W_{k\parallel} \\ \underline{W}_{\underline{k}\perp} \end{pmatrix} + \frac{d-2}{d} \begin{pmatrix} k \\ 0 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} k \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} W_{k\parallel} \\ \underline{W}_{\underline{k}\perp} \end{pmatrix}\right]$$

$$= k^2 \begin{pmatrix} W_{k\parallel} \\ \underline{W}_{\underline{k}\perp} \end{pmatrix} + \frac{d-2}{d} k \hat{e}_k \left[k \hat{e}_k \cdot W_{k\parallel} \hat{e}_k\right]$$

$$= k^2 \begin{pmatrix} W_{k\parallel} \\ \underline{W}_{\underline{k}\perp} \end{pmatrix} + \frac{d-2}{d} k^2 \underbrace{W_{k\parallel} \hat{e}_k}_{= \begin{pmatrix} W_{k\parallel} \\ 0 \end{pmatrix}}$$

$$= k^2 \underline{W}_{\underline{k}\perp} + \frac{2(d-1)}{d} k^2 \underline{W}_{\underline{k}\parallel}.$$

#

Utilisant ce lemme, l'Eq. (20) devient : (5)

$$\underbrace{\hat{e}_i\left[\partial_\tau W_{ki}(\tau)-p\,\xi_T^{(a)*}W_{ki}(\tau)+ik_i\Theta_{\underline{k}}(\tau)+ik_i\rho_{\underline{k}}(\tau)\right]}+\frac{\eta^*}{2}\left[k^2\underline{W}_{k\perp}+\frac{2(d-1)}{d}k^2\underline{W}_{k\parallel}\right]=-p\sqrt{\frac{m}{k_BT_H}}\,\hat{e}_i\int d\underline{e}\,e^{-ik\cdot e}\,V_T\,\xi_{ui}^{(1)}\frac{2}{V_H}$$

$$=\left(\partial_\tau-p\xi_T^{(a)*}\right)\underbrace{\hat{e}_iW_{ki}(\tau)}_{=\underline{W}_{k\perp}+\underline{W}_{k\parallel}}+i\underbrace{k_i\hat{e}_i}_{=k\hat{e}_k}\Theta_k(\tau)+i\underbrace{k_i\hat{e}_i}_{=k\hat{e}_k}\rho_{\underline{k}}(\tau)$$

$$\Longrightarrow\left(\partial_\tau-p\xi_T^{(a)*}\right)\begin{pmatrix}\underline{W}_{k\parallel}\\ \underline{W}_{k\perp}\end{pmatrix}+ik\left[\rho_{\underline{k}}(\tau)+\Theta_{\underline{k}}(\tau)\right]\begin{pmatrix}\hat{e}_k\\ 0\end{pmatrix}+\frac{\eta^*}{2}k^2\begin{pmatrix}\frac{2(d-1)}{d}\underline{W}_{k\parallel}\\ \underline{W}_{k\perp}\end{pmatrix}=-p\sqrt{\frac{m}{k_BT_H}}\,\hat{e}_i\int d\underline{e}\,e^{-ik\cdot e}\,V_T\,\xi_{ui}^{(1)}\frac{2}{V_H}\qquad(22)$$

On remarque déjà que dans la limite $p\to 0$ on retrouve le cas particulier du gaz élastique (cf. Brey et al.). Il reste à traiter le membre de droite de l'Eq. (22). On le fait de façon similaire au traitement du terme $\xi^{(2)}$ de Brey. Ainsi :

$$\xi_{ui}^{(1)}=-V_T\left(\kappa^*\frac{1}{T}\nabla_iT+\mu^*\frac{1}{n}\nabla_in\right)\underbrace{\frac{(d+2)^2}{32(d-1)}\left(1+a_2\frac{-86-101d+32d^2+88d^3+28d^4}{32(d+2)}\right)}_{:=a}$$

$$=-V_Ta\kappa^*\frac{1}{T}\nabla_iT-V_Ta\mu^*\frac{1}{n}\nabla_in$$

$$\Longrightarrow V_T\xi_{ui}^{(1)}=-V_T^2a\kappa^*\frac{1}{T}\nabla_iT-V_T^2a\mu^*\frac{1}{n}\nabla_in\qquad;\ V_T=\sqrt{\frac{2k_BT}{m}}$$

$$=-a\kappa^*\frac{2k_B\not{T}}{m}\frac{1}{\not{T}}\nabla_iT-a\mu^*\frac{2k_BT}{m}\frac{1}{n}\nabla_in$$

$$=-a\kappa^*\frac{2k_B}{m}\underbrace{\nabla_i(\delta T+T_H)}_{=O(\delta)}-a\mu^*\frac{2k_BT}{m}\underbrace{\frac{1}{\delta n+n_H}}_{=\frac{1}{n_H}\left(1-\frac{\delta n}{n_H}\right)+O(\delta^2)}\underbrace{\nabla_i(\delta n+n_H)}_{=O(\delta)}$$

$$=-a\kappa^*\frac{2k_B}{m}\nabla_i\delta T-a\mu^*\frac{2k_BT_H}{mn_H}\nabla_i\delta n$$

Ainsi :

$$=-a\kappa^*\frac{2k_B}{m}\frac{1}{2}V_H\sqrt{\frac{m}{k_BT_H}}\nabla_{e_i}\delta T-a\mu^*\frac{2k_BT_H}{mn_H}\frac{1}{2}V_H\sqrt{\frac{m}{k_BT_H}}\nabla_{e_i}\delta n\qquad(23)$$

$$-p\sqrt{\frac{m}{k_BT_H}}\,\hat{e}_i\int d\underline{e}\,e^{-ik\cdot e}\,V_T\,\xi_{ui}^{(1)}\frac{2}{V_H}=\int d\underline{e}\,e^{-ike}\,p\sqrt{\frac{m}{k_BT_H}}\,\frac{2}{V_H}\,a\,\frac{2k_B}{m}\,\frac{1}{2}V_H\sqrt{\frac{m}{k_BT_H}}\left(\kappa^*\nabla_{e_i}\delta T+T_H\mu^*\nabla_{e_i}\frac{\delta n}{n_H}\right)\hat{e}_i$$

$$=\int d\underline{e}\,e^{-ike}\,p\,a\left(\kappa^*\nabla_{e_i}\frac{\delta T}{T_H}+\mu^*\nabla_{e_i}\frac{\delta n}{n_H}\right)\hat{e}_i$$

$$=pa\kappa^*\int d\underline{e}\,e^{-ik\cdot e}\nabla_{e_i}\frac{\delta T}{T_H}\hat{e}_i+pa\mu^*\int d\underline{e}\,e^{-ik\cdot e}\nabla_{e_i}\frac{\delta n}{n_H}\hat{e}_i$$

$$=pa\kappa^*ik_i\int d\underline{e}\,e^{-ik\cdot e}\frac{\delta T}{T_H}\hat{e}_i+pa\mu^*ik_i\int d\underline{e}\,e^{-ik\cdot e}\frac{\delta n}{n_H}\hat{e}_i$$

$$=pa\kappa^*ik_i\hat{e}_i\Theta_{\underline{k}}(\tau)+pa\mu^*ik_i\hat{e}_i\rho_{\underline{k}}(\tau)$$

$$=pa\kappa^*ik\Theta_{\underline{k}}(\tau)\hat{e}_k+pa\mu^*ik\rho_{\underline{k}}(\tau)\hat{e}_k\qquad(24)$$

Notons

$$a=\xi_u^*=\frac{(d+2)^2}{32(d-1)}\left(1+a_2\frac{-86-101d+32d^2+88d^3+28d^4}{32(d+2)}\right),\qquad(25)$$

alors (24) dans (22) donne finalement :

$$\left(\partial_\tau-p\xi_T^{(a)*}\right)\begin{pmatrix}\underline{W}_{k\parallel}\\ \underline{W}_{k\perp}\end{pmatrix}+ik\left[\rho_{\underline{k}}(\tau)+\Theta_{\underline{k}}(\tau)\right]\begin{pmatrix}\hat{e}_k\\ 0\end{pmatrix}+\frac{\eta^*}{2}k^2\begin{pmatrix}\frac{2(d-1)}{d}\underline{W}_{k\parallel}\\ \underline{W}_{k\perp}\end{pmatrix}$$

$$=p\,\xi_u^*\,ik\left[\kappa^*\Theta_{\underline{k}}(\tau)+\mu^*\rho_{\underline{k}}(\tau)\right]\begin{pmatrix}\hat{e}_k\\ 0\end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow$

$$\left(\partial_\tau - p\zeta_\tau^{(0)*}\right)\begin{pmatrix} \underline{W}_{\underline{k}\parallel} \\ \underline{W}_{\underline{k}\perp} \end{pmatrix} + ik\left[\left(1-p\zeta_u^*\mathcal{M}^*\right)\rho_{\underline{k}}(\tau) + \left(1-p\zeta_u^*\mathcal{K}^*\right)\theta_{\underline{k}}(\tau)\right]\begin{pmatrix} \hat{e}_{\underline{k}} \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\eta^*}{2}k^2\begin{pmatrix} \frac{2(d-1)}{d}\underline{W}_{\underline{k}\parallel} \\ \underline{W}_{\underline{k}\perp} \end{pmatrix} = 0$$

Ce qui donne deux équations :

$$\left(\partial_\tau - p\zeta_\tau^{(0)*} + \frac{d-1}{d}\eta^* k^2\right)\underline{W}_{\underline{k}\parallel} + ik\left[\left(1-p\zeta_u^*\mathcal{M}^*\right)\rho_{\underline{k}}(\tau) + \left(1-p\zeta_u^*\mathcal{K}^*\right)\theta_{\underline{k}}(\tau)\right] = 0 \quad (26)$$

$$\left(\partial_\tau - p\zeta_\tau^{(0)*} + \frac{1}{2}\eta^* k^2\right)\underline{W}_{\underline{k}\perp} = 0 \quad (27)$$

$$\zeta_u^* = \frac{(d+2)^2}{32(d-1)}\left(1 + a_2\frac{-86-101d+32d^2+88d^3+28d^4}{32(d+2)}\right) \quad (28)$$

Dans la limite $p\to 0$, en dimension $d=3$, on retrouve bien le calcul de Brey et al.

<u>Énergie</u> :

$$\partial_t T + u_i \nabla_i T + \frac{2}{n k_B d}\left(P_{ij}\nabla_i u_j + \nabla_j q_j\right) = -pT\xi_T^{(0)}$$

$$\Rightarrow \partial_t T + u_i\nabla_i T + \frac{2}{nk_B d}\nabla_i u_j\left[p\delta_{ij} - \eta\left(\nabla_i u_j + \nabla_j u_i - \frac{2}{d}\delta_{ij}\nabla_n u_n\right)\right] + \frac{2}{nk_B d}\nabla_i\left[-\kappa\nabla_i T - \mu\nabla_i n\right] = -pT\xi_T^{(0)}$$

$$\Rightarrow \partial_t T + u_i\nabla_i T + \frac{2}{nk_B d}\, p\nabla_i u_i - \frac{2}{nk_B d}\nabla_i u_j\left[\eta\left(\nabla_i u_j + \nabla_j u_i - \frac{2}{d}\delta_{ij}\nabla_n u_n\right)\right]$$
$$- \frac{2}{nk_B d}\nabla_i(\kappa\nabla_i T) - \frac{2}{nk_B d}\nabla_i\left(\mu\nabla_i n\right) = -pT\xi_T^{(0)} \qquad (29)$$

Linéarisation :

$$\begin{cases} u_i \to \delta u_i \\ n \to \delta n + n_H \\ T \to \delta T + T_H \end{cases}$$

$$\Rightarrow \partial_t(\delta T + T_H) + \delta u_i\nabla_i(\delta T + T_H) + \underbrace{\frac{2}{nk_B d}\, n k_B T}_{\text{doit être } O(\delta^0)}\underbrace{\nabla_i\delta u_i}_{=O(\delta)} - \underbrace{\frac{2}{nk_B d}\nabla_i\delta u_j\left[\eta_0\eta^*\right.}_{\text{doit être } O(\delta^0)}\left.\underbrace{\left(\nabla_i\delta u_j + \nabla_j\delta u_i - \frac{2}{d}\delta_{ij}\nabla_n\delta u_n\right)}_{=O(\delta)}\right]$$

$$- \underbrace{\frac{2}{nk_B d}\nabla_i\left(\kappa_0\kappa^*\right.}_{\text{doit être } O(\delta^0)}\left.\underbrace{\nabla_i\delta T}_{=O(\delta)}\right) - \underbrace{\frac{2}{nk_B d}\nabla_i\left(\frac{T\kappa_0}{n}\mu^*\right.}_{\text{doit être } O(\delta^0)}\left.\underbrace{\nabla_i\delta n}_{=O(\delta)}\right) = -p\,(\delta T + T_H)\,\xi_T^{(0)}$$

$$\Rightarrow \partial_t\delta T + \partial_t T_H + \underbrace{\delta u_i\nabla_i\delta T}_{=O(\delta^2)} + \frac{2}{d}T_H\nabla_i\delta u_i - \frac{2}{n_H k_B d}\nabla_i\delta u_j\left[\eta_{0H}\eta^*\left(\nabla_i\delta u_j + \nabla_j\delta u_i - \frac{2}{d}\delta_{ij}\nabla_n\delta u_n\right)\right]$$

$$- \frac{2}{n_H k_B d}\kappa_0\kappa^*\nabla_i\nabla_i\delta T - \frac{2}{n_H k_B d}\frac{T_H\kappa_0}{n_H}\mu^*\nabla_i\nabla_i\delta n = -p\,\delta T\,\xi_T^{(0)} - pT_H\xi_T^{(0)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\nu_H\partial_\tau\delta T + \frac{1}{2}\nu_H\partial_\tau T_H + \frac{2}{d}T_H\frac{1}{2}\nu_H\sqrt{\frac{m}{k_B T_H}}\nabla_{e_i}\delta u_i$$

$$- \frac{2}{n_H k_B d}\frac{1}{2}\nu_H\sqrt{\frac{m}{k_B T_H}}\underbrace{\nabla_{e_i}\delta u_j\left[\eta_{0H}\eta^*\frac{1}{2}\nu_H\sqrt{\frac{m}{k_B T_H}}\left(\nabla_{e_i}\delta u_j + \nabla_{e_j}\delta u_i - \frac{2}{d}\delta_{ij}\nabla_{e_n}\delta u_n\right)\right]}_{=O(\delta^2)}$$

$$- \frac{2}{n_H k_B d}\kappa_0\kappa^*\left(\frac{1}{2}\nu_H\right)^{\cancel{2}}\frac{m}{k_B T_H}\nabla_{e_i}\nabla_{e_i}\delta T - \frac{2}{n_H k_B d}\frac{T_H\kappa_0}{n_H}\mu^*\left(\frac{1}{2}\nu_H\right)^{\cancel{2}}\frac{m}{k_B T_H}\nabla_{e_i}\nabla_{e_i}\delta n$$

$$= \left(-p\,\delta T\underbrace{\xi_T^{(0)}}_{=\nu_{0H}\xi_T^{(0)*}} - pT_H\xi_T^{(0)}\right)\cdot\frac{2}{\nu_H}$$

$$\Rightarrow \partial_\tau\delta T + \partial_\tau T_H + \frac{2}{d}T_H\sqrt{\frac{m}{k_B T_H}}\nabla_{e_i}\delta u_i - \frac{2}{n_H k_B d}\kappa_0\kappa^*\frac{1}{2}\nu_H\frac{m}{k_B T_H}\nabla_{e_i}\nabla_{e_i}\delta T - \frac{2}{n_H k_B d}\frac{T_H\kappa_0}{n_H}\mu^*\frac{1}{2}\nu_H\frac{m}{k_B T_H}\nabla_{e_i}\nabla_{e_i}\delta n$$

$$= -p\underbrace{\nu_{0H}\frac{2}{\nu_H}}_{=1}\xi_T^{(0)*}\delta T - pT_H\frac{2}{\nu_H}\xi_T^{(0)}$$

En variables de Fourier :

$$\int d\mathbf{e}\, e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{e}}\partial_\tau\delta T + \int d\mathbf{e}\, e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{e}}\partial_\tau T_H + \frac{2}{d}T_H\sqrt{\frac{m}{k_B T_H}}\overbrace{\int d\mathbf{e}\, e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{e}}\nabla_{e_i}\delta u_i}^{=ik_i\int d\mathbf{e}\, e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{e}}\delta u_i} - \frac{2}{n_H k_B d}\kappa_0\kappa^*\frac{1}{2}\nu_H\frac{m}{k_B T_H}\int d\mathbf{e}\, e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{e}}\nabla_{e_i}\nabla_{e_i}\delta T$$

$$- \frac{2}{n_H k_B d}\frac{T_H\kappa_0}{n_H}\mu^*\frac{1}{2}\nu_H\frac{m}{k_B T_H}\int d\mathbf{e}\, e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{e}}\nabla_{e_i}\nabla_{e_i}\delta n = -2p\xi_T^{(0)*}\int d\mathbf{e}\, e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{e}}\delta T - 2p\frac{T_H}{\nu_H}\int d\mathbf{e}\, e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{e}}\xi_T^{(0)}$$

$$\Rightarrow \partial_\tau\delta T_{\mathbf{k}}(\tau) + \partial_\tau T_H\int d\mathbf{e}\, e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{e}} + \frac{2}{d}T_H\sqrt{\frac{m}{k_B T_H}}\, ik_i\underbrace{\int d\mathbf{e}\, e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{e}}\delta u_i}_{=\delta u_{\mathbf{k}i}(\tau)} - \frac{\cancel{2}}{n_H k_B d}\kappa_0\kappa^*\cancel{\tfrac{1}{2}}\nu_H\frac{m}{k_B T_H}\left(-k_ik_i\int d\mathbf{e}\, e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{e}}\delta T\right)$$

$$- \frac{2}{n_H k_B d}\frac{T_H\kappa_0}{n_H}\mu^*\frac{1}{2}\nu_H\frac{m}{k_B T_H}\left(-k_ik_i\int d\mathbf{e}\, e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{e}}\delta n\right) = -2p\xi_T^{(0)*}\delta T_{\mathbf{k}}(\tau) - 2p\frac{T_H}{\nu_H}\int d\mathbf{e}\, e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{e}}\xi_T^{(0)}$$

$$\Rightarrow \partial_\tau\delta T_{\mathbf{k}}(\tau) + \partial_\tau T_H\int d\mathbf{e}\, e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{e}} + \frac{2}{d}T_H\, ik_i W_{\mathbf{k}i}(\tau) - \frac{\kappa_0\kappa^*}{n_H k_B d}\nu_H\frac{m}{k_B}(-k_ik_i)\frac{\delta T_{\mathbf{k}}(\tau)}{T_H}$$

$$- \frac{\cancel{2}}{n_H k_B d}\cancel{T_H}\kappa_0\mu^*\cancel{\tfrac{1}{2}}\nu_H\frac{m}{k_B\cancel{T_H}}(-k_ik_i)\frac{\delta n_{\mathbf{k}}(\tau)}{n_H} = -2p\xi_T^{(0)*}\delta T_{\mathbf{k}}(\tau) - 2p\frac{T_H}{\nu_H}\int d\mathbf{e}\, e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{e}}\xi_T^{(0)}$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{T_H}\partial_\tau \delta T_{\underline{k}}(\tau) + \frac{1}{T_H}\partial_\tau T_H \int d\underline{\ell}\, e^{-i\underline{k}\cdot\underline{\ell}} + \frac{2}{d}\, i\,\underline{k}\cdot\underline{W}_{\underline{k}}(\tau) + \frac{\mathcal{K}_0 \mathcal{K}^* \nu_H m}{n_H k_B^2\, d\, T_H} k^2 \theta_{\underline{k}}(\tau)$$

$$+ \frac{\mathcal{K}_0 \mathcal{M}^* \nu_H m}{n_H k_B^2 d\, T_H} k^2 \rho_{\underline{k}}(\tau) = -2p\,\xi_T^{(0)*}\theta_{\underline{k}}(\tau) - \frac{2p}{\nu_H}\int d\underline{\ell}\, e^{-i\underline{k}\cdot\underline{\ell}}\, \xi_T^{(0)} \qquad (30)$$

Avec:

$$\frac{1}{T_H}\partial_\tau T_H = \frac{2}{\nu_H}\frac{1}{T_H}\partial_t T_H = \frac{2}{\nu_H}\frac{1}{T_H}\left(-p T_H \xi_T^{(0)}\right) = -2p\,\xi_T^{(0)*} \qquad (31)$$

$$\mathcal{K}_0 = \frac{d(d+2)}{2(d-1)}\frac{k_B}{m}\eta_0 \quad ; \quad \nu_H = \frac{p^{(0)}}{\eta_{0H}} = \frac{n_H k_B T_H}{\eta_{0H}} \qquad (32)$$

$$\frac{\mathcal{K}_0 \nu_H m}{d\, n_H k_B^2 T_H} = \frac{d(d+2)}{2(d-1)}\frac{k_B}{m}\eta_{0H}\,\frac{n_H k_B T_H}{\eta_{0H}}\,\frac{m}{d\, n_H k_B^2 T_H} = \frac{d+2}{2(d-1)} \qquad (33)$$

$$\partial_\tau \theta_{\underline{k}}(\tau) = \frac{1}{T_H}\partial_\tau \delta T_{\underline{k}}(\tau) - \delta T_{\underline{k}}(\tau)\frac{1}{T_H^2}\partial_\tau T_H = \frac{1}{T_H}\partial_\tau \delta T_{\underline{k}}(\tau) + \theta_{\underline{k}}(\tau)\underbrace{\frac{1}{T_H}\left(-\partial_\tau T_H\right)}_{\overset{(31)}{=}\ 2p\,\xi_T^{(0)*}}$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{T_H}\partial_\tau \delta T_{\underline{k}}(\tau) = \partial_\tau \theta_{\underline{k}}(\tau) - 2p\,\xi_T^{(0)*}\theta_{\underline{k}}(\tau) \qquad (34)$$

Ainsi (30) devient:

$$\partial_\tau \theta_{\underline{k}}(\tau) - 2p\,\xi_T^{(0)*}\theta_{\underline{k}}(\tau) - 2p\,\xi_T^{(0)*}\int d\underline{\ell}\, e^{-i\underline{k}\cdot\underline{\ell}} + \frac{2}{d}\, i k\, W_{k\parallel}(\tau) + \frac{d+2}{2(d-1)}k^2 \mathcal{K}^*\theta_{\underline{k}}(\tau) + \frac{d+2}{2(d-1)}k^2\mathcal{M}^*\rho_{\underline{k}}(\tau)$$

$$= -2p\,\xi_T^{(0)*}\theta_{\underline{k}}(\tau) - \frac{2p}{\nu_H}\int d\underline{\ell}\, e^{-i\underline{k}\cdot\underline{\ell}}\,\xi_T^{(0)} \qquad (35)$$

Utilisant $\xi_T^{(0)} = \nu_0\, \xi_T^{(0)*}$ il vient:

$$-\frac{2p}{\nu_H}\int d\underline{\ell}\, e^{-i\underline{k}\cdot\underline{\ell}}\,\xi_T^{(0)} = -\frac{2p}{\nu_H}\int d\underline{\ell}\, e^{-i\underline{k}\cdot\underline{\ell}}\,\xi_T^{(0)*}\frac{p^{(0)}}{\eta_0}$$

$$= -\frac{2p}{\nu_H}\xi_T^{(0)*}\int d\underline{\ell}\, e^{-i\underline{k}\cdot\underline{\ell}}\; n k_B T\,\frac{8}{d+2}\,\frac{\pi^{(d-1)/2}}{\Gamma(d/2)}\,\frac{\sigma^{d-1}}{\sqrt{m k_B T}}$$

$$= -\frac{2p}{\nu_H}\xi_T^{(0)*}\int d\underline{\ell}\, e^{-i\underline{k}\cdot\underline{\ell}}\;\underbrace{\frac{8}{d+2}\,\frac{\pi^{(d-1)/2}}{\Gamma(d/2)}\,\frac{\sigma^{d-1}}{\sqrt{m k_B}}\,k_B}_{:=a}\; n T^{1/2}$$

$$= -\frac{2p}{\nu_H}\xi_T^{(0)*}\,\underbrace{a\, n_H T_H^{1/2}}_{=\nu_H}\,\frac{1}{n_H T_H^{1/2}}\int d\underline{\ell}\, e^{-i\underline{k}\cdot\underline{\ell}}\,(\delta n + n_H)(\delta T + T_H)^{1/2}$$

$$= -2p\,\xi_T^{(0)*}\frac{1}{n_H T_H^{1/2}}\int d\underline{\ell}\, e^{-i\underline{k}\cdot\underline{\ell}}\; n_H T_H^{1/2}\left(1+\frac{\delta n}{n_H}\right)\underbrace{\left(1+\frac{\delta T}{T_H}\right)^{1/2}}_{=1+\frac{1}{2}\frac{\delta T}{T_H}}$$

$$= -2p\,\xi_T^{(0)*}\int d\underline{\ell}\, e^{-i\underline{k}\cdot\underline{\ell}}\left[1+\frac{\delta n}{n_H}+\frac{1}{2}\frac{\delta T}{T_H}+O(\delta^2)\right]$$

$$= -2p\,\xi_T^{(0)*}\int d\underline{\ell}\, e^{-i\underline{k}\cdot\underline{\ell}} - 2p\,\xi_T^{(0)*}\underbrace{\int d\underline{\ell}\, e^{-i\underline{k}\cdot\underline{\ell}}\frac{\delta n}{n_H}}_{=\ \rho_{\underline{k}}(\tau)} - 2p\,\xi_T^{(0)*}\underbrace{\int d\underline{\ell}\, e^{-i\underline{k}\cdot\underline{\ell}}\frac{\delta T}{T_H}}_{=\theta_{\underline{k}}(\tau)}\frac{1}{2}$$

$$= -2p\,\xi_T^{(0)*}\int d\underline{\ell}\, e^{-i\underline{k}\cdot\underline{\ell}} - 2p\,\xi_T^{(0)*}\rho_{\underline{k}}(\tau) - p\,\xi_T^{(0)*}\theta_{\underline{k}}(\tau) \qquad (36)$$

(36) dans (35) donne:

$$\partial_\tau \theta_{\underline{k}}(\tau) - 2p\,\xi_T^{(0)*}\int d\underline{\ell}\, e^{-i\underline{k}\cdot\underline{\ell}} + \frac{2}{d}\, i k\, W_{k\parallel}(\tau) + \frac{d+2}{2(d-1)}k^2\mathcal{K}^*\theta_{\underline{k}}(\tau) + \frac{d+2}{2(d-1)}k^2\mathcal{M}^*\rho_{\underline{k}}(\tau)$$

$$= -2p\,\xi_T^{(0)*}\int d\underline{\ell}\, e^{-i\underline{k}\cdot\underline{\ell}} - 2p\,\xi_T^{(0)*}\rho_{\underline{k}}(\tau) - p\,\xi_T^{(0)*}\theta_{\underline{k}}(\tau)$$

$$\Longrightarrow \boxed{\left[\partial_\tau + p\,\xi_T^{(0)*} + \frac{d+2}{2(d-1)}\mathcal{K}^* k^2\right]\theta_{\underline{k}}(\tau) + \left[2p\,\xi_T^{(0)*} + \frac{d+2}{2(d-1)}\mathcal{M}^* k^2\right]\rho_{\underline{k}}(\tau) + \frac{2}{d}\, i k\, W_{k\parallel}(\tau) = 0} \qquad (37)$$

Pour $p \neq 0$, la structure formelle de l'équation est exactement la même que celle de Brey. A nouveau, dans la limite $p \to 0$ on retrouve le résultat de Brey et al. ($d=3$), sans toutefois les taux de déclin au second ordre! En effet, on a décidé de négliger ces taux: il a été montré par Brey qu'on pouvait effectivement les négliger si $p = 0$ (~ 1000 fois plus petits). Notre hypothèse est que ces taux restent négligeables pour $p > 0$.

Equations hydrodynamiques linéarisées, en mode de Fourier : Résumé

$$\left[\partial_\tau + 2p\,\xi_n^{(0)*}\right]\rho_{\underline{k}}(\tau) + p\,\xi_n^{(0)*}\,\Theta_{\underline{k}}(\tau) + ik\,W_{k\parallel}(\tau) = 0 \qquad (38)$$

$$\left[\partial_\tau - p\,\xi_T^{(0)*} + \frac{d-1}{d}\eta^* k^2\right]\underline{W}_{k\parallel} + i\underline{k}\left[(1-p\,\xi_u^*\mu^*)\rho_{\underline{k}}(\tau) + (1-p\,\xi_u^*\kappa^*)\Theta_{\underline{k}}(\tau)\right] = 0 \qquad (39)$$

$$\left[\partial_\tau - p\,\xi_T^{(0)*} + \frac{1}{2}\eta^* k^2\right]\underline{W}_{k\perp} = 0 \qquad (40)$$

$$\left[\partial_\tau + p\,\xi_T^{(0)*} + \frac{d+2}{2(d-1)}\kappa^* k^2\right]\Theta_{\underline{k}}(\tau) + \left[2p\,\xi_T^{(0)*} + \frac{d+2}{2(d-1)}\mu^* k^2\right]\rho_{\underline{k}}(\tau) + \frac{2}{d}\,i\,k\,W_{k\parallel}(\tau) = 0 \qquad (41)$$

Avec :

$$\rho_{\underline{k}}(\tau) = \frac{\delta n_{\underline{k}}(\tau)}{n_H(\tau)} \; ; \qquad \delta n_{\underline{k}}(\tau) = \int d\underline{\ell}\, e^{-i\underline{k}\cdot\underline{\ell}}\,\delta n(\ell,\tau) \; ; \quad \delta n(\ell,\tau) = n(\ell,\tau) - n_H(\tau)$$

$$\underline{W}_{\underline{k}}(\tau) = \sqrt{\frac{m}{k_B T_H(t)}}\,\delta\underline{u}_{\underline{k}}(\tau) \; ; \quad \delta\underline{u}_{\underline{k}}(\tau) = \int d\underline{\ell}\, e^{-i\underline{k}\cdot\underline{\ell}}\,\delta\underline{u}(\ell,\tau) \; ; \quad \delta\underline{u}(\ell,\tau) = \underline{u}(\ell,\tau) - u_H(\ell,\tau)$$

$$\Theta_{\underline{k}}(\tau) = \frac{\delta T_{\underline{k}}(\tau)}{T_H(\tau)} \; ; \qquad \delta T_{\underline{k}}(\tau) = \int d\underline{\ell}\, e^{-i\underline{k}\cdot\underline{\ell}}\,\delta T(\ell,\tau) \; ; \quad \delta T(\ell,\tau) = T(\ell,\tau) - T_H(\ell,\tau)$$

$$\underline{\ell} = \frac{\nu_H(t)}{2}\sqrt{\frac{m}{k_B T_H(t)}}\,\underline{r}$$

$$\tau = \frac{1}{2}\int_0^t dt'\,\nu_H(t')$$

$$n_H(t) = n_0\,(1 + p\,t/t_0)^{\gamma_n} \; ; \quad \gamma_n = -\,\xi_n^{(0)}(0)/t_0 \qquad ; \quad t_0^{-1} = \xi_n^{(0)}(0) + \xi_T^{(0)}(0)/2$$

$$T_H(t) = T_0\,(1 + p\,t/t_0)^{\gamma_T} \; ; \quad \gamma_T = -\,\xi_T^{(0)}(0)/t_0$$

} c'est la solution à l'ordre zéro : sol. homogène.

$$\xi_u^* = \frac{(d+2)^2}{32(d-1)}\left(1 + a_2\,\frac{-86 - 101d + 32d^2 + 88d^3 + 28d^4}{32(d+2)}\right)$$

<u>Résolution</u> : Les étapes de la résolution sont très similaires à celles de Brey.

On remarque que l'Eq. (40) est découplée des autres, et peut donc être résolue pour la composante transverse du champ de vitesse. Soit

$$s_\perp^{(p,k)} = p\,\zeta_T^{(0)*} - \frac{1}{2}\eta^* k^2 \,, \tag{42}$$

alors (40) devient:

$$\partial_\tau \underline{W}_{k\perp}(\tau) = s_\perp \underline{W}_{k\perp}(\tau) \,, \tag{43}$$

dont la solution est:

$$\underline{W}_{k\perp}(\tau) = \underline{W}_{k\perp}(0)\, e^{-s_\perp \tau} . \tag{44}$$

Notre formulation tient lieu dans un espace de dimension d. Par conséquent, nous avons $\underline{W}_{k\parallel}$ qui est dans un espace vectoriel de dimension 1, et $\underline{W}_{k\perp}$ dans un espace de dimension d−1. Ceci identifie donc d−1 modes transverses, donc par analogie avec l'élasticité des modes de cisaillement. Il reste donc 3 champs hydrodynamiques à déterminer, c'est-à-dire la densité ρ_k, la température θ_k, et le champ longitudinal des vitesses $\underline{W}_{k\parallel}(\tau) = W_{k\parallel}\hat{e}_k$. Le problème étant linéaire, la solution pour ces champs s'exprime comme combinaison linéaire des fonctions propres du problème aux valeurs propres associé. Notre système s'écrit:

$$\begin{pmatrix} \dot\rho_k \\ \dot W_{k\parallel} \\ \dot\theta_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2p\,\zeta_n^{(0)*} & -ik & -p\,\zeta_n^{(0)*} \\ -ik(1-p\,\zeta_u^*\mu^*) & p\,\zeta_T^{(0)*} - \frac{d-1}{d}\eta^* k^2 & -ik(1-p\,\zeta_u^*\kappa^*) \\ -2p\,\zeta_T^{(0)*} - \frac{d+2}{2(d-1)}\mu^* k^2 & -\frac{2}{d}ik & -p\,\zeta_T^{(0)*} - \frac{d+2}{2(d-1)}\kappa^* k^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \rho_k \\ W_{k\parallel} \\ \theta_k \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} \rho_k \\ W_{k\parallel} \\ \theta_k \end{pmatrix} \tag{45}$$

Les fonctions propres sont de la forme $\mathcal{C}_n(k)\exp[s_n(p,k)\tau]$, $n = 1,\dots,3$, avec s_n les valeurs propres de la matrice M, solutions de l'équation cubique $\det(M - s\mathbb{I}) = 0$. Le système obtenu est relativement grand, et il n'est pas utile d'écrire l'équation caractéristique car cette dernière ne se résout que numériquement. Notons que l'hypothèse de Chapman Enskog est que les variations spatiales des champs sont faibles devant le libre-parcours moyen, c'est-à-dire que $k \ll 1$. Ainsi la solution que nous cherchons est telle que $k \sim 0$: il n'est alors pas justifié de fournir une relation de dispersion $\forall k$. On peut résoudre l'équation caractéristique utilisant les expressions trouvées de $\zeta_n^{(0)*}$, ζ_u^*, $\zeta_T^{(0)*}$, μ^*, η^*, κ^*. Ceci se fait numériquement, par exemple avec Mathematica.

▸ **Densité :**

Déviation des champs hydrodynamiques de l'état homogène :

Dérivation des Eqs. (62) – (65) Brey

Ⓐ

$$\delta y_\alpha(\underline{x},t) = y_\alpha(\underline{x},t) - y_{H\alpha}(t)$$
$$\delta y_{k\alpha}(\tau) = \int d\underline{\ell}\; e^{-i\underline{k}\cdot\underline{\ell}}\, \delta y_\alpha(\underline{\ell},\tau)$$

H = homogène ; $\alpha = \{n, u_i, T\}$. Changement de variables :

$$\tau = \frac{1}{2}\int_0^t dt' V_H(t') \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial \tau}{\partial t}\frac{\partial}{\partial \tau} = \left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{2}\int_0^t dt' V_H(t')\right)\frac{\partial}{\partial \tau} = \frac{1}{2}V_H(t)\frac{\partial}{\partial \tau}$$

$$\ell = \frac{1}{2}V_H(t)\sqrt{\frac{m}{k_B T_H}} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \ell_i} = \frac{\partial \ell_j}{\partial r_i}\frac{\partial}{\partial \ell_j} = \left(\frac{\partial}{\partial r_i}\frac{1}{2}V_H(t)\sqrt{\frac{m}{k_B T_H}}\,\underline{r}\right)\frac{\partial}{\partial \ell_j} = \frac{1}{2}V_H(t)\sqrt{\frac{m}{k_B T_H}}\frac{\partial}{\partial \ell_i}$$

$$\rho_{\underline{k}}(\tau) = \frac{\delta n_k(\tau)}{n_H} \; ; \; \theta_{\underline{k}}(\tau) = \frac{\delta T_k(\tau)}{T_H} \; ; \; \underline{W}_{\underline{k}}(\tau) = \sqrt{\frac{m}{k_B T_H}}\,\delta \underline{u}_{\underline{k}}(\tau)$$

Densité :

$$\partial_t n + \nabla_i (n u_i) = 0$$

$$\Rightarrow \partial_t(\delta n + n_H) + \nabla_i\Big[\underbrace{(\delta n + n_H)(\delta u_i + \overset{=0}{u_{iH}})}_{=\underbrace{\delta n\,\delta u_i}_{=O(\delta^2)} + n_H \delta u_i}\Big] = 0$$

$$\Rightarrow \partial_t \delta n + n_H \nabla_i \delta u_i = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}V_H\, \partial_\tau \delta n + n_H \frac{1}{2}V_H \sqrt{\frac{m}{k_B T_H}}\, \nabla_{\ell_i} \delta u_i = 0$$

(the factors $\frac{1}{2}V_H$ are struck out)

$$\Rightarrow \int d\ell\, e^{-i\underline{k}\cdot\underline{\ell}}\, \partial_\tau \delta n + n_H \sqrt{\frac{m}{k_B T_H}} \underbrace{\int d\ell\, e^{-i\underline{k}\cdot\underline{\ell}}\, \nabla_{\ell_i} \delta u_i}_{= + i k_i \int d\ell\, e^{-i\underline{k}\cdot\underline{\ell}}\, \delta u_i \; + \; \underbrace{e^{-i\underline{k}\cdot\underline{\ell}}\, \delta u_i \Big|_{\partial \Omega}}_{\to 0 \text{ : conditions aux bords !}}} = 0$$

$$\Rightarrow \partial_\tau \underbrace{\int d\ell\, e^{-i\underline{k}\cdot\underline{\ell}}\, \delta n}_{= \delta n_{\underline{k}}(\tau)} + i k_i\, n_H \sqrt{\frac{m}{k_B T_H}} \underbrace{\int d\ell\, e^{-i\underline{k}\cdot\underline{\ell}}\, \delta u_i}_{= \delta u_{k_i}(\tau)} = 0$$

$$\Rightarrow \partial_\tau \underbrace{\frac{\delta n_{\underline{k}}(\tau)}{n_H}}_{=\rho_{\underline{k}}(\tau)} + i k_i \underbrace{\sqrt{\frac{m}{k_B T_H}}\,\delta u_{k_i}(\tau)}_{= W_{k_i}(\tau)} = 0$$

$$\Rightarrow \partial_\tau \rho_{\underline{k}}(\tau) + i \underbrace{\underline{k}\cdot \underline{W}_{\underline{k}}(\tau)}_{= k\, W_{k\parallel}(\tau)} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\partial_\tau \rho_{\underline{k}}(\tau) + i\, k\, W_{k\parallel}(\tau) = 0}$$

▸ Impulsion bis (I)

$$\partial_t u_i + u_j \nabla_j u_i + \frac{1}{mn}\nabla_i p - \frac{1}{mn}\nabla_j\left[\eta\left(\nabla_i u_j + \nabla_j u_i - \frac{2}{3}\delta_{ij}\nabla_n u_n\right)\right] = 0 \quad ; \; p = n k_B T \; ; \; \eta = \eta_0 \eta^* \qquad (1)$$

Linéarisation :

$$\begin{cases} u_i \to \delta u_i + u_{iH} & , \; u_{iH} = 0 \\ n \to \delta n + n_H & ; \; n_H = n_0 = \text{cte}|_{t,x} \\ T \to \delta T + T_H & , \; T_H = T_H(t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \partial_t \delta u_i + \underbrace{\delta u_j \nabla_j \delta u_i}_{=O(\delta^2)} + \frac{1}{m(\delta n + n_H)}\nabla_i\left[(\delta n + n_H) k_B (\delta T + T_H)\right] - \frac{1}{m(\delta n + n_H)}\nabla_j\left[\eta_0\eta^*\left(\nabla_i \delta u_j + \nabla_j \delta u_i - \frac{2}{3}\delta_{ij}\nabla_n \delta u_n\right)\right] = 0 \qquad (2)$$

Avec :

$$\frac{1}{\delta n + n_H} = \frac{1}{n_H}\frac{1}{1+\frac{\delta n}{n_H}} \simeq \frac{1}{n_H}\left(1 - \underbrace{\frac{\delta n}{n_H}}_{=O(\delta)}\right)$$

$$k_B(\delta n + n_H)(\delta T + T_H) = k_B\left[\underbrace{\delta n\,\delta T}_{=O(\delta^2)} + \delta n\, T_H + n_H \delta T + \underbrace{n_H T_H}_{=\text{cte}|_x}\right]$$

$$\nabla_i\left[k_B(\delta n + n_H)(\delta T + T_H)\right] = k_B \nabla_i(\delta n\, T_H + n_H \delta T) = k_B T_H \nabla_i \delta n + k_B n_H \nabla_i \delta T$$

Ainsi (2) devient :

$$\partial_t \delta u_i + \frac{1}{m n_H}\left(1 - \underbrace{\frac{\delta n}{n_H}}_{\substack{=O(\delta) \\ \text{donc engendre} \\ \text{du } O(\delta^2) \Rightarrow \text{négligé}}}\right) k_B T_H \underbrace{\left[\nabla_i \delta n + n_H \nabla_i \frac{\delta T}{T}\right]}_{=O(\delta)}$$

$$- \frac{1}{m n_H}\left(1 - \underbrace{\frac{\delta n}{n_H}}_{\substack{=O(\delta) \\ \text{donc engendre} \\ \text{du } O(\delta^2) \Rightarrow \text{négligé.}}}\right)\nabla_j\left[\eta_0 \eta^* \underbrace{\left(\nabla_i \delta u_j + \nabla_j \delta u_i - \frac{2}{3}\delta_{ij}\nabla_n \delta u_n\right)}_{=O(\delta)}\right] = 0 \qquad (3)$$

$$\Rightarrow \partial_t \delta u_i + \frac{k_B T_H}{m}\left(\nabla_i \frac{\delta n}{n_H} + \nabla_i \frac{\delta T}{T_H}\right) - \frac{1}{m n_H}\nabla_j\left[\eta_0\eta^*\left(\nabla_i \delta u_j + \nabla_j \delta u_i - \frac{2}{3}\delta_{ij}\nabla_n \delta u_n\right)\right] = 0 \qquad (4)$$

Changements de variables :

$$\tau = \frac{1}{2}\int_0^t dt'\, \nu_H(t') \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial \tau}{\partial t}\frac{\partial}{\partial \tau} = \left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{2}\int_0^t dt'\, \nu_H(t')\right)\frac{\partial}{\partial \tau} = \frac{1}{2}\nu_H(t)\frac{\partial}{\partial \tau}$$

$$\underline{\ell} = \frac{1}{2}\nu_H(t)\sqrt{\frac{m}{k_B T_H}}\,\underline{r} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial r_i} = \frac{\partial \ell_i}{\partial r_i}\frac{\partial}{\partial \ell_i} = \left(\frac{\partial}{\partial r_i}\frac{1}{2}\nu_H(t)\sqrt{\frac{m}{k_B T_H}}\,\underline{r}\right)\frac{\partial}{\partial \ell_i} = \frac{1}{2}\nu_H(t)\sqrt{\frac{m}{k_B T_H}}\frac{\partial}{\partial \ell_i}$$

Ainsi (4) devient :

$$\frac{1}{2}\nu_H \partial_\tau \delta u_i + \frac{k_B T_H}{m}\frac{1}{2}\nu_H\sqrt{\frac{m}{k_B T_H}}\left(\nabla_{\ell_i}\frac{\delta n}{n_H} + \nabla_{\ell_i}\frac{\delta T}{T_H}\right)$$

$$- \frac{1}{m n_H}\frac{1}{2}\nu_H\sqrt{\frac{m}{k_B T_H}}\nabla_{\ell_i}\left[\eta_0\eta^*\frac{1}{2}\nu_H(t)\sqrt{\frac{m}{k_B T_H}}\left(\nabla_{\ell_i}\delta u_j + \nabla_{\ell_j}\delta u_i - \frac{2}{3}\delta_{ij}\nabla_{\ell_n}\delta u_n\right)\right] = 0 \qquad (5)$$

En utilisant $\nu_H = p_H^{(c)}/\eta_{0H}$ et en constatant que dans (5) η_0 doit être le coefficient de l'état homogène η_{0H} pour ne pas avoir de termes d'ordre δ^2, on a

$$\eta_0 \frac{1}{2}\nu_H(t)\sqrt{\frac{m}{k_B T_H}} = \eta_{0H}\frac{1}{2}\frac{p_H^{(c)}}{\eta_{0H}}\sqrt{\frac{m}{k_B T_H}} = \frac{1}{2}n_H k_B T_H\sqrt{\frac{m}{k_B T_H}} = \frac{1}{2}n_H\sqrt{m k_B T_H} \qquad (6)$$

On passe en variables de Fourier :

$$\delta n_{\underline{k}}(\tau) = \int d\underline{\ell}\, e^{-i\underline{k}\cdot\underline{\ell}}\delta n \; ; \quad \rho_{\underline{k}}(\tau) = \frac{\delta n_{\underline{k}}(\tau)}{n_H}$$

$$\delta T_{\underline{k}}(\tau) = \int d\underline{\ell}\, e^{-i\underline{k}\cdot\underline{\ell}}\delta T \; ; \quad \theta_{\underline{k}}(\tau) = \delta T_{\underline{k}}(\tau)/T_H(t)$$

$$\delta \underline{u}_{\underline{k}}(\tau) = \int d\underline{\ell}\, e^{-i\underline{k}\cdot\underline{\ell}}\delta \underline{u} \; ; \quad \underline{w}_{\underline{k}}(\tau) = \sqrt{m/(k_B T_H)}\,\delta \underline{u}_{\underline{k}}(\tau)$$

Ainsi (5) devient :

$$\frac{1}{2}\nu_H\int d\underline{\ell}\, e^{-i\underline{k}\cdot\underline{\ell}}\partial_\tau \delta u_i + \frac{1}{2}\nu_H\sqrt{\frac{k_B T_H}{m}}\int d\underline{\ell}\, e^{-i\underline{k}\cdot\underline{\ell}}\nabla_{\ell_i}\frac{\delta n}{n_H} + \frac{1}{2}\nu_H\sqrt{\frac{k_B T_H}{m}}\int d\underline{\ell}\, e^{-i\underline{k}\cdot\underline{\ell}}\nabla_{\ell_i}\frac{\delta T}{T_H}$$

$$- \frac{1}{m n_H}\frac{1}{2}\nu_H\sqrt{\frac{m}{k_B T_H}}\int d\underline{\ell}\, e^{-i\underline{k}\cdot\underline{\ell}}\left[\nabla_{\ell_j}\frac{1}{2}n_H\sqrt{m k_B T_H}\,\eta^*\left(\nabla_{\ell_i}\delta u_j + \nabla_{\ell_j}\delta u_i - \frac{2}{3}\delta_{ij}\nabla_{\ell_n}\delta u_n\right)\right] = 0 \qquad (7)$$

(les facteurs $\frac{1}{2}\nu_H$ sont barrés)

Par parties :

$$\int d\underline{\ell}\, e^{-i\underline{k}\cdot\underline{\ell}}\nabla_{\ell_i} f(\underline{\ell}) = -\int d\underline{\ell}\left(\underbrace{\nabla_{\ell_i} e^{-i\underline{k}\cdot\underline{\ell}}}_{=-ik_i}\right) f(\underline{\ell}) + \cancel{e^{-i\underline{k}\cdot\underline{\ell}} f(\underline{\ell})\Big|_{\partial\Omega}}^{\,0}$$

: en spécifiant les conditions aux bords selon laquelle δT, δn, et $\delta \underline{u}$ s'annulent à l'infini !

$$= i k_i \int d\underline{\ell}\, e^{-i\underline{k}\cdot\underline{\ell}} f(\underline{\ell}) \qquad (8)$$

Ainsi (8) dans (7) donne :

$$\sqrt{\frac{m}{k_BT_H}}\partial_\tau \delta u_{k_i}(\tau) + ik_i\frac{\delta n_k(\tau)}{n_H} + ik_i\frac{\delta T_k(\tau)}{T_H} - \frac{1}{n_H k_B T_H}\frac{1}{2} n_H\sqrt{m k_B T_H}\,\zeta^*\int d\underline{\ell}\, e^{-i\underline{k}\cdot\underline{\ell}}\left[\nabla_{\ell_j}\nabla_{\ell_i}\delta u_j + \nabla_{\ell_j}\nabla_{\ell_j}\delta u_i - \frac{2}{3}\delta_{ij}\nabla_{\ell_j}\nabla_{\ell_n}\delta u_n\right] = 0 \quad \text{(II)}$$

$\Rightarrow$

$$\sqrt{\frac{m}{k_BT_H}}\partial_\tau \delta u_{k_i}(\tau) + ik_i\rho_{\underline{k}}(\tau) + ik_i\Theta_{\underline{k}}(\tau) - \frac{\zeta^*}{2}\sqrt{\frac{m}{k_BT_H}}\int d\underline{\ell}\, e^{-i\underline{k}\cdot\underline{\ell}}\left[\nabla_{\ell_j}\nabla_{\ell_i}\delta u_j + \nabla_{\ell_j}\nabla_{\ell_j}\delta u_i - \frac{2}{3}\nabla_{\ell_i}\nabla_{\ell_n}\delta u_n\right] = 0 \quad (9)$$

Or on a que:

$$\partial_\tau\left(\sqrt{\frac{m}{k_BT_H}}\delta u_{k_i}(\tau)\right) = \sqrt{\frac{m}{k_BT_H}}\partial_\tau \delta u_{k_i}(\tau) + \delta u_{k_i}(\tau)\partial_\tau\sqrt{\frac{m}{k_BT_H}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{m}{k_BT_H}}\partial_\tau \delta u_{k_i}(\tau) = \partial_\tau\Big[\underbrace{\sqrt{\frac{m}{k_BT_H}}\delta u_{k_i}(\tau)}_{=W_{k_i}(\tau)}\Big] - \delta u_{k_i}(\tau)\partial_\tau\sqrt{\frac{m}{k_BT_H}}$$

$$= \partial_\tau W_{k_i}(\tau) - \underbrace{\sqrt{\frac{m}{k_BT_H}}\delta u_{k_i}(\tau)}_{=W_{k_i}(\tau)}\underbrace{\sqrt{\frac{k_BT_H}{m}}\sqrt{\frac{m}{k_B}}}_{=T_H^{1/2}}\underbrace{\partial_\tau T_H^{-1/2}}_{=\frac{2}{\nu_H}\partial_t T^{-1/2} = \frac{2}{\nu_H}\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{T_H^{1/2}}\frac{1}{T_H}\partial_t T_H} \quad (10)$$

Et aussi:

$$\zeta^* = \frac{\zeta^{(0)}}{\nu_{0H}} \quad ; \quad \zeta^{(0)} = -\frac{1}{T_H}\partial_t T_H\,, \quad (11)$$

que l'on injecte dans (10) pour obtenir:

$$\sqrt{\frac{m}{k_BT_H}}\partial_\tau \delta u_{k_i}(\tau) = \partial_\tau W_{k_i}(\tau) - W_{k_i}(\tau)\, T_H^{1/2}\frac{2}{\nu_H}\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{T_H^{1/2}}\underbrace{\frac{1}{T_H}\partial_t T_H}_{=-\zeta^{(0)}}$$

$$= \partial_\tau W_{k_i}(\tau) - W_{k_i}(\tau)\frac{\zeta^{(0)}}{\nu_H}$$

$$= \partial_\tau W_{k_i}(\tau) - W_{k_i}(\tau)\zeta^* \quad (12)$$

Utilisant (12) dans (9) il vient:

$$\partial_\tau W_{k_i}(\tau) - \zeta^* W_{k_i}(\tau) + ik_i\rho_{\underline{k}}(\tau) + ik_i\Theta_{\underline{k}}(\tau) - \frac{\zeta^*}{2}\sqrt{\frac{m}{k_BT_H}}\int d\underline{\ell}\, e^{-i\underline{k}\cdot\underline{\ell}}\left[\nabla_{\ell_j}\nabla_{\ell_i}\delta u_j + \nabla_{\ell_j}\nabla_{\ell_j}\delta u_i - \frac{2}{3}\nabla_{\ell_i}\nabla_{\ell_n}\delta u_n\right] = 0 \quad (13)$$

Avec:

$$\nabla_{\ell_j}\nabla_{\ell_i}\delta u_j + \nabla_{\ell_j}\nabla_{\ell_j}\delta u_i - \frac{2}{3}\nabla_{\ell_i}\nabla_{\ell_n}\delta u_n = \underbrace{\left(1-\frac{2}{3}\right)}_{=1/3}\nabla_{\ell_i}\nabla_{\ell_j}\delta u_j + \nabla_{\ell_j}\nabla_{\ell_j}\delta u_i \quad (14)$$

Ainsi:

$$(\partial_\tau - \zeta^*)W_{k_i}(\tau) + ik_i\rho_{\underline{k}}(\tau) + ik_i\Theta_{\underline{k}}(\tau) - \frac{\zeta^*}{2}\sqrt{\frac{m}{k_BT_H}}\int d\underline{\ell}\, e^{-i\underline{k}\cdot\underline{\ell}}\nabla_{\ell_j}\nabla_{\ell_j}\delta u_i - \frac{\zeta^*}{2}\sqrt{\frac{m}{k_BT_H}}\int d\underline{\ell}\, e^{-i\underline{k}\cdot\underline{\ell}}\nabla_{\ell_i}\nabla_{\ell_j}\delta u_j\frac{1}{3} = 0 \quad (15)$$

Partiel:

$$\int d\underline{\ell}\, e^{-i\underline{k}\cdot\underline{\ell}}\nabla_{\ell_j}\nabla_{\ell_j}\delta u_i = ik_j\int d\underline{\ell}\, e^{-i\underline{k}\cdot\underline{\ell}}\nabla_{\ell_j}\delta u_i = i^2k_jk_j\int d\underline{\ell}\, e^{-i\underline{k}\cdot\underline{\ell}}\delta u_i = -k_jk_j\sqrt{\frac{k_BT_H}{m}}W_{k_i}(\tau)$$

$$\int d\underline{\ell}\, e^{-i\underline{k}\cdot\underline{\ell}}\nabla_{\ell_i}\nabla_{\ell_j}\delta u_j = ik_i\int d\underline{\ell}\, e^{-i\underline{k}\cdot\underline{\ell}}\nabla_{\ell_j}\delta u_j = i^2k_ik_j\int d\underline{\ell}\, e^{-i\underline{k}\cdot\underline{\ell}}\delta u_j = -k_ik_j\sqrt{\frac{k_BT_H}{m}}W_{k_j}(\tau)$$

(15) devient donc:

$$(\partial_\tau - \zeta^*)W_{k_i}(\tau) + ik_i\rho_{\underline{k}}(\tau) + ik_i\Theta_{\underline{k}}(\tau) + \frac{\zeta^*}{2}\left[k_jk_jW_{k_i}(\tau) + \frac{1}{3}k_ik_jW_{k_j}(\tau)\right] = 0 \quad (16)$$

Lemme: $\hat{e}_i\left[k_jk_jW_{k_i}(\tau) + \frac{1}{3}k_ik_jW_{k_j}(\tau)\right] = k^2\underline{W}_{\underline{k}\perp} + \frac{4}{3}k^2\underline{W}_{\underline{k}\parallel}$, où $\underline{W}_{\underline{k}\perp}$ est la composante $\perp$ à $\underline{k}$, $\underline{W}_{\underline{k}\parallel}$ $\parallel$ à $\underline{k}$. (17)

Preuve: notons $\underline{k} = k\hat{e}_k$, $\underline{W}_{\underline{k}} = \underline{W}_{\underline{k}\perp} + \underline{W}_{\underline{k}\parallel}$, $\underline{W}_{\underline{k}\parallel} = \underline{W}_{\underline{k}}\cdot\hat{e}_k$, $\underline{W}_{\underline{k}\perp} = \underline{W}_{\underline{k}} - \underline{W}_{\underline{k}\parallel}$; $|\underline{W}_{\underline{k}\parallel}| = W_{k\parallel}$, $|\underline{W}_{\underline{k}\perp}| = W_{k\perp}$. On a alors

$$\sum_{i=1}^{d}\hat{e}_i\left[k_jk_jW_{k_i}(\tau) + \frac{1}{3}k_ik_jW_{k_j}(\tau)\right] = \left(\sum_{j=1}^{d}k_jk_j\right)\left(\sum_{i=1}^{d}\hat{e}_iW_{k_i}(\tau)\right) + \frac{1}{3}\left(\sum_{i=1}^{d}\hat{e}_ik_i\right)\left(\sum_{j=1}^{d}k_jW_{k_j}(\tau)\right)$$

$$= k^2\begin{pmatrix}W_{k\parallel}\\ \underline{W}_{k\perp}\end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix}k\\0\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}k\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}W_{k\parallel}\\ \underline{W}_{k\perp}\end{pmatrix}\right]$$

$$= k^2\begin{pmatrix}W_{k\parallel}\\ \underline{W}_{k\perp}\end{pmatrix} + \frac{1}{3}k\hat{e}_k\left[k\hat{e}_k\cdot W_{k\parallel}\hat{e}_k\right]$$

$$= k^2\begin{pmatrix}W_{k\parallel}\\ \underline{W}_{k\perp}\end{pmatrix} + \frac{1}{3}k^2\underbrace{W_{k\parallel}\hat{e}_k}_{=\begin{pmatrix}W_{k\parallel}\\0\end{pmatrix}}$$

$$= k^2\underline{W}_{\underline{k}\perp} + \frac{4}{3}k^2\underline{W}_{\underline{k}\parallel}.$$

#

Utilisant ce lemme, l'Eq. (16) devient :

$$\underbrace{\hat{e}_i\left[(\partial_\tau-\xi^*)W_{k_i}(\tau)+ik_i\rho_{\underline{k}}(\tau)+ik_i\Theta_{\underline{k}}(\tau)\right]}+\frac{\eta^*}{2}\left[k^2\underline{W}_{k\perp}+\frac{4}{3}k^2\underline{W}_{k\parallel}\right]=0$$

$$=(\partial_\tau-\xi^*)\underbrace{\hat{e}_iW_{k_i}(\tau)}_{=\underline{W}_{k\perp}+\underline{W}_{k\parallel}}+i\underbrace{k_i\hat{e}_i}_{=k\hat{e}_k}\rho_{\underline{k}}(\tau)+i\underbrace{k_i\hat{e}_i}_{=k\hat{e}_k}\Theta_{\underline{k}}(\tau)$$

$$\Longrightarrow\boxed{(\partial_\tau-\xi^*)\begin{pmatrix}\underline{W}_{k\parallel}\\ \underline{W}_{k\perp}\end{pmatrix}+ik\left[\rho_{\underline{k}}(\tau)+\Theta_{\underline{k}}(\tau)\right]\begin{pmatrix}\hat{e}_k\\ 0\end{pmatrix}+\frac{\eta^*}{2}k^2\begin{pmatrix}\frac{4}{3}\underline{W}_{k\parallel}\\ \underline{W}_{k\perp}\end{pmatrix}=0}\qquad\#$$

▶ Énergie

$$\partial_t T + u_i \nabla_i T + \frac{2}{3nk_B} p \nabla_i u_i - \frac{2}{3nk_B} \nabla_i u_j \left[\eta \left(\nabla_i u_j + \nabla_j u_i - \frac{2}{3} \delta_{ij} \nabla_n u_n \right) \right]$$

$$- \frac{2}{3nk_B} \nabla_i (\kappa \nabla_i T) - \frac{2}{3nk_B} \nabla_i (\mu \nabla_i n) = - T \zeta^{(0)} - T \zeta^{(2)} \quad (1)$$

Linéarisation:

$u_i \to \delta u_i + u_{iH}$ ($u_{iH} = 0$)

$n \to \delta n + n_H$

$T \to \delta T + T_H$

$$\Rightarrow \partial_t (\delta T + T_H) + \delta u_i \underbrace{\nabla_i (\delta T + T_H)}_{= \nabla_i \delta T} + \underbrace{\frac{2}{3 n k_B} n k_B T}_{\text{doit être de } O(\delta^0)} \underbrace{\nabla_i \delta u_i}_{= O(\delta)} - \frac{2}{3nk_B} \nabla_i \delta u_j \left[\eta_0 \eta^* \left(\nabla_i \delta u_j + \nabla_j \delta u_i - \frac{2}{3} \nabla_n \delta u_n \right) \right]$$

$$- \underbrace{\frac{2}{3nk_B} \nabla_i (\kappa_0 \kappa^*}_{\text{doit être } O(\delta^0)} \underbrace{\nabla_i \delta T}_{= O(\delta)}) - \underbrace{\frac{2}{3nk_B} \nabla_i \left(\frac{T \kappa_0}{n} \mu^* \right.}_{\text{doit être } O(\delta^0)} \left. \underbrace{\nabla_i \delta n}_{= O(\delta)} \right) = - (\delta T + T_H) \zeta^{(0)} - (\delta T + T_H) \underbrace{\zeta^{(2)}}_{= \xi_1 \nabla^2 T + \xi_2 \nabla^2 n}$$

$$\Rightarrow \partial_t \delta T + \partial_t T_H + \underbrace{\delta u_i \nabla_i \delta T}_{= O(\delta^2)} + \frac{2}{3} T_H \nabla_i \delta u_i - \frac{2}{3nk_B} \underbrace{\nabla_i \delta u_j \left[\eta_0 \eta^* \left(\nabla_i \delta u_j + \nabla_j \delta u_i - \frac{2}{3} \nabla_n \delta u_n \right) \right]}_{= O(\delta^2)}$$

$$- \frac{2}{3 n_H k_B} \nabla_i (\kappa_0 \kappa^* \nabla_i \delta T) - \frac{2}{3 n_H k_B} \frac{T_H}{n_H} \kappa_0 \mu^* \nabla_i \nabla_i \delta n = -(\delta T + T_H) \zeta^{(0)} - (\delta T + T_H) (\underbrace{\xi_1 \nabla^2 \delta T + \xi_2 \nabla^2 n}_{= O(\delta)})$$

$$\Rightarrow \partial_t \delta T + \partial_t T_H + \frac{2}{3} T_H \nabla_i \delta u_i - \frac{2}{3 n_H k_B} \kappa_0 \kappa^* \nabla_i \nabla_i \delta T - \frac{2}{3 n_H k_B} \frac{T_H}{n_H} \kappa_0 \mu^* \nabla_i \nabla_i \delta n = -(\delta T + T_H) \zeta^{(0)} - T_H \xi_1 \nabla^2 \delta T - T_H \xi_2 \nabla^2 \delta n \quad (2)$$

Changement de variables:

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{2} \nu_H(t) \frac{\partial}{\partial \tau}$$

$$\frac{\partial}{\partial r_i} = \frac{1}{2} \nu_H(t) \sqrt{\frac{m}{k_B T_H}} \frac{\partial}{\partial \ell_i}$$

Ainsi (2) devient:

$$\frac{1}{2} \nu_H \partial_\tau \delta T + \frac{1}{2} \nu_H \partial_\tau T_H + \frac{2}{3} T_H \frac{1}{2} \nu_H \sqrt{\frac{m}{k_B T_H}} \nabla_{\ell_i} \delta u_i - \frac{2}{3 n_H k_B} \kappa_0 \kappa^* \left(\frac{1}{2} \nu_H \right)^2 \frac{m}{k_B T_H} \nabla_{\ell_i} \nabla_{\ell_i} \delta T - \frac{2}{3 n_H k_B} \frac{T_H}{n_H} \kappa_0 \mu^* \left(\frac{1}{2} \nu_H \right)^2 \frac{m}{k_B T_H} \nabla_{\ell_i} \nabla_{\ell_i} \delta n$$

$$= - \delta T \zeta^{(0)} - T_H \zeta^{(0)} - T_H \xi_1 - T_H \xi_1 \left(\frac{1}{2} \nu_H \right)^2 \frac{m}{k_B T_H} \nabla_{\ell_i} \nabla_{\ell_i} \delta T - T_H \xi_2 \left(\frac{1}{2} \nu_H \right)^2 \frac{m}{k_B T_H} \nabla_{\ell_i} \nabla_{\ell_i} \delta n$$

En variables de Fourier:

$$\frac{1}{2} \nu_H \partial_\tau \underbrace{\int d\ell\, e^{-i k \cdot \ell} \delta T}_{} + \frac{1}{2} \nu_H \partial_\tau \int d\ell\, e^{-ik\cdot\ell} T_H + \frac{2}{3} T_H \frac{1}{2} \nu_H \sqrt{\frac{m}{k_B T_H}} \underbrace{\int d\ell\, e^{-ik\cdot\ell} \nabla_{\ell_i} \delta u_i}_{= i k_i \int d\ell\, e^{-ik\cdot\ell} \delta u_i}$$

$$- \frac{2}{3 n_H k_B} \kappa_0 \kappa^* \left(\frac{1}{2} \nu_H \right)^2 \frac{m}{k_B T_H} \underbrace{\int d\ell\, e^{-ik\cdot\ell} \nabla_{\ell_i} \nabla_{\ell_i} \delta T}_{= -k_i k_i \int d\ell\, e^{-ik\cdot\ell} \delta T} - \frac{2}{3 n_H k_B} \frac{T_H}{n_H} \kappa_0 \mu^* \left(\frac{1}{2} \nu_H \right)^2 \frac{m}{k_B T_H} \underbrace{\int d\ell\, e^{-ik\cdot\ell} \nabla_{\ell_i} \nabla_{\ell_i} \delta n}_{= -k_i k_i \int d\ell\, e^{-ik\cdot\ell} \delta n}$$

$$= - \zeta^{(0)} \underbrace{\int d\ell\, e^{-ik\cdot\ell} \delta T}_{= \delta T_k(\tau)} - T_H \int d\ell\, e^{-ik\cdot\ell} \zeta^{(0)} - T_H \xi_1 \underbrace{\int d\ell\, e^{-ik\cdot\ell} \nabla^2 \delta T}_{= -k_i k_i \int d\ell\, e^{-ik\cdot\ell} \delta T} \left(\frac{1}{2}\nu_H\right)^2 \frac{m}{k_B T_H} - T_H \xi_2 \underbrace{\int d\ell\, e^{-ik\cdot\ell} \nabla^2 \delta n}_{= -k_i k_i \int d\ell\, e^{-ik\cdot\ell} \delta n} \left(\frac{1}{2} \nu_H \right)^2 \frac{m}{k_B T_H}$$

$$\Rightarrow \partial_\tau \delta T_k(\tau) + \partial_\tau T_H \int d\ell\, e^{-ik\cdot\ell} + \frac{2}{3} T_H \underbrace{\sqrt{\frac{m}{k_B T_H}} i k_i \delta u_{k_i}(\tau)}_{= W_k(\tau)} + \frac{2}{3 n_H k_B} \kappa_0 \kappa^* \frac{1}{2} \nu_H \frac{m}{k_B T_H} k_i k_i \underbrace{\delta T_k(\tau)}_{= \theta_k(\tau)}$$

$$+ \frac{2}{3 n_H k_B} \frac{T_H}{n_H} \kappa_0 \mu^* \frac{1}{2} \nu_H \frac{m}{k_B T_H} k_i k_i \underbrace{\delta n_k(\tau)}_{= \rho_k(\tau)} = - \frac{2}{\nu_H} \underbrace{\zeta^{(0)}}_{= \zeta^*} \delta T_k(\tau) - T_H \int d\ell\, e^{-ik\cdot\ell} \zeta^{(0)} \frac{2}{\nu_H}$$

$$+ T_H \xi_1 k_i k_i \delta T_k(\tau) \left(\frac{1}{2}\nu_H\right)\frac{m}{k_B T_H} + T_H \xi_2 k_i k_i \delta n_k(\tau) \left(\frac{1}{2} \nu_H \right) \frac{m}{k_B T_H}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{T_H} \partial_\tau \delta T_k(\tau) + \frac{1}{T_H} \partial_\tau T_H \int d\ell\, e^{-ik\cdot\ell} + \frac{2}{3} i \underbrace{k_i W_{k_i}(\tau)}_{= k W_{k\parallel}(\tau)} + \frac{\kappa_0 \kappa^* \nu_H m}{3 n_H k_B^2 T_H} \underbrace{k_i k_i}_{= k^2} \theta_k(\tau) + \frac{\kappa_0 \mu^* \nu_H m}{3 n_H k_B^2 T_H} \underbrace{k_i k_i}_{= k^2} \rho_k(\tau)$$

$$= -2 \zeta^* \theta_k(\tau) - 2 \frac{1}{\nu_H} \int d\ell\, e^{-ik\cdot\ell} \zeta^{(0)} + k^2 \xi_1 T_H \theta_k(\tau) \left(\frac{1}{2}\nu_H\right) \frac{m}{k_B T_H} + k^2 \xi_2 n_H \rho_k(\tau) \left(\frac{1}{2} \nu_H \right) \frac{m}{k_B T_H} \quad (3)$$

Avec:

$$\frac{1}{T_H} \partial_\tau T_H = \frac{2}{\nu_H} \frac{1}{T_H} \partial_t T_H = \frac{2}{\nu_H} \left(- \zeta^{(0)} \right) = - 2 \zeta^* \quad (4)$$

$$\kappa_0 = \frac{d(d+2)}{2(d-1)} \frac{k_B}{m} \eta_0 \overset{d=3}{=} \frac{15}{4} \frac{k_B}{m} \eta_0 \ ; \quad \nu_H = \frac{p^{(0)}}{\eta_0} = \frac{n_H k_B T_H}{\eta_0}$$

$$\frac{\kappa_0 \nu_H m}{3 n_H k_B^2 T_H} = \frac{15}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{15}{12} = \frac{5}{4} \quad (5)$$

$$\partial_\tau \theta_k(\tau) = \frac{1}{T_H} \partial_\tau \delta T_k(\tau) - \delta T_k(\tau) \frac{1}{T_H^2} \partial_\tau T_H = \frac{1}{T_H} \partial_\tau \delta T_k(\tau) + \theta_k(\tau) \underbrace{\left(- \frac{1}{T_H} \partial_\tau T_H \right)}_{\overset{(4)}{=} 2\zeta^*}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{T_H} \partial_\tau \delta T_k(\tau) = \partial_\tau \theta_k(\tau) - 2 \zeta^* \theta_k(\tau) \quad (6)$$

Ainsi (3) devient:

$$\partial_\tau \Theta_k(\tau) - 2\xi^*\Theta_k(\tau) - 2\xi^* \int d\ell\, e^{-ik\cdot\ell} + \frac{2}{3} i k W_{k\parallel}(\tau) + \frac{5}{4}k^2 \mathcal{H}^*\Theta_k(\tau) + \frac{5}{4}k^2\mu^* \rho_k(\tau)$$
$$= -2\xi^*\Theta_k(\tau) - \frac{2}{v_H}\int d\ell\, e^{-ik\cdot\ell}\zeta^{(0)} + k^2 T_H\, \xi_1 \Theta_k(\tau)\tfrac{1}{2} v_H \frac{m}{k_B T_H} + k^2 n_H\, \xi_2 \rho_k(\tau)\tfrac{1}{2} v_H\frac{m}{k_B T_H} \qquad (7)$$

Utilisant $\zeta^{(0)} = v_0\zeta^*$ il vient:

$$-\frac{2}{v_H}\int d\ell\, e^{-ik\cdot\ell}\zeta^{(0)} = -2\xi^*\frac{1}{v_H}\int d\ell\, e^{-ik\cdot\ell}\Big[\underbrace{\frac{16}{5} n\sigma^2\sqrt{\frac{\pi}{m}}\sqrt{kT}}_{=\frac{16}{5}\sigma^2\sqrt{\frac{k\pi}{m}}\, nT^{1/2},\ \ \frac{16}{5}\sigma^2\sqrt{\frac{k\pi}{m}} := a}\Big]$$
$$= -2\xi^*\frac{1}{v_H}\int d\ell\, e^{-ik\cdot\ell}\, a n T^{1/2}$$
$$= -2\xi^*\frac{1}{v_H}\, a\int d\ell\, e^{-ik\cdot\ell}(\delta n + n_H)(\delta T + T_H)^{1/2}$$
$$= -2\xi^*\underbrace{\frac{a n_H T_H^{1/2}}{v_H}}_{=1}\frac{1}{n_H T_H^{1/2}}\int d\ell\, e^{-ik\cdot\ell}\, n_H T_H^{1/2}\left(\frac{\delta n}{n_H}+1\right)\underbrace{\left(\frac{\delta T}{T_H}+1\right)^{1/2}}_{=1+\frac{1}{2}\frac{\delta T}{T_H}+o(\delta^2)}$$
$$= -2\xi^*\int d\ell\, e^{-ik\cdot\ell}\left[1+\frac{\delta n}{n_H}+\frac{1}{2}\frac{\delta T}{T_H}+o(\delta^2)\right]$$
$$= -2\xi^*\left[\int d\ell\, e^{-ik\cdot\ell} + \rho_k(\tau) + \frac{1}{2}\Theta_k(\tau)\right]$$
$$= -2\xi^*\rho_k(\tau) - \xi^*\Theta_k(\tau) - 2\xi^*\int d\ell\, e^{-ik\cdot\ell} \qquad (8)$$

Insérant (8) dans (7):

$$\partial_\tau\Theta_k(\tau) + \frac{2}{3} i k W_{k\parallel}(\tau) + \frac{5}{4}k^2\mathcal{H}^*\Theta_k(\tau) + \frac{5}{4}k^2\mu^*\rho_k(\tau) = -2\xi^*\rho_k(\tau) - \xi^*\Theta_k(\tau) + k^2 T_H\, \xi_1\Theta_k(\tau)\tfrac{1}{2}v_H\frac{m}{k_BT_H} + k^2 n_H\, \xi_2\rho_k(\tau)\tfrac{1}{2}v_H\frac{m}{k_BT_H}\tfrac{5}{4}\tfrac{4}{5}$$

$\Longrightarrow$

$$\left[\partial_\tau + \xi^* + \frac{5}{4}\left(\mathcal{H}^* - \frac{4}{5}\,\tfrac{1}{2}v_H\frac{m}{k_BT_H}\,T_H\,\xi_1\right)k^2\right]\Theta_k(\tau) + \left[2\xi^* + \frac{5}{4}\left(\mu^* - \frac{4}{5}\,\tfrac{1}{2}v_H\frac{m}{k_BT_H}\,n_H\,\xi_2\right)k^2\right]\rho_k(\tau) + \frac{2}{3} i k W_{k\parallel}(\tau) = 0 \qquad (9)$$

Or:

$$\frac{4}{5}\,\frac{1}{2}v_H\frac{m}{k_BT_H} = \frac{2}{5}\, m n_H \underbrace{\frac{v_H}{n_H k_B T_H}}_{=\frac{v_H}{p_0}=\frac{1}{\zeta_0}} = \frac{2}{5}\,\frac{n_H k_B}{\frac{k_B}{m}\zeta_0} = \frac{2}{5}\cdot\frac{15}{4}\,\frac{n_H k_B}{\frac{15}{4}\frac{k_B}{m}\zeta_0} = \frac{3}{2}\,\frac{n_H k_B}{\mathcal{H}_0}, \qquad (10)$$

Ainsi on définit les coefficients de transport de Burnett par:

$$T_H\,\frac{4}{5}\,\frac{1}{2}v_H\frac{m}{k_BT_H}\,\xi_1 \overset{(10)}{=} \frac{3}{2}\,\frac{n_H k_B T_H}{\mathcal{H}_0}\,\xi_1 = \frac{3}{2}\,\frac{p}{\mathcal{H}_0}\,\xi_1 \doteq \xi_1^* \qquad (11)$$

$$n_H\,\frac{4}{5}\,\frac{1}{2}v_H\frac{m}{k_BT_H}\,\xi_2 \overset{(10)}{=} \frac{3}{2}\,\frac{n_H^2 k_B}{\mathcal{H}_0}\,\xi_2 \doteq \xi_2^* \qquad (12)$$

(11) et (12) dans (10) donnent finalement:

$$\boxed{\left[\partial_\tau + \xi^* + \frac{5}{4}\left(\mathcal{H}^* - \xi_1^*\right)k^2\right]\Theta_k(\tau) + \left[2\xi^* + \frac{5}{4}\left(\mu^* - \xi_2^*\right)k^2\right]\rho_k(\tau) + \frac{2}{3} i k W_{k\parallel}(\tau) = 0} \qquad (13)$$

$$\partial_t T_H(t) = -\xi_T^{(1)}(t)\, T_H(t)$$

$$\Longrightarrow \partial_t T_H(t) = -\xi_T^{(0)*}\, V_{0H}(t)\, T_H(t)$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial T_H(t)}{T_H(t)} = -\xi_T^{(1)*}\, V_{0H}(t)\, \partial t$$

$$\Longrightarrow \ln\left(\frac{T_H(t)}{T_H(0)}\right) = -2\,\xi_T^{(1)*}\, \frac{1}{2}\int_0^t ds\, V_{0H}(s)$$

$$\Longrightarrow \underbrace{\frac{1}{2}\int_0^t ds\, V_{0H}(S)}_{=\tau} = -\frac{1}{2\xi_T^{(1)*}} \ln\left(\frac{T_H(t)}{T_H(0)}\right) \qquad (1)$$

Nun also:

$$\delta \underline{u}_{\underline{k}_\perp}(\tau) = \delta u_{\underline{k}_\perp}(0)\, \exp\Big(-\underbrace{\tfrac{1}{2}\eta^* k^2}_{:=S}\tau\Big)$$

$$= \delta u_{\underline{k}_\perp}(0)\, \exp\big(-S\,\tau\big) \qquad ; \tau = \frac{1}{2}\int_0^t ds\, V_{0H}(S)$$

$$= \delta u_{\underline{k}_\perp}(0)\, \exp\left(-S\,\frac{1}{2}\int_0^t ds\, V_{0H}(s)\right)$$

$$\overset{(1)}{=} \delta u_{\underline{k}_\perp}(0)\, \exp\left(-S\left(-\frac{1}{2\xi_T^{(1)*}}\ln\left(\frac{T_H(t)}{T_H(0)}\right)\right)\right)$$

$$= \delta \underline{u}_{\underline{k}_\perp}(0)\, \exp\left(\frac{S}{2\xi_T^{(1)*}}\ln\left(\frac{T_H(t)}{T_H(0)}\right)\right)$$

$$= \delta \underline{u}_{\underline{k}_\perp}(0)\left[\frac{T_H(t)}{T_H(0)}\right]^{S/2\xi_T^{(1)*}} \qquad ; T_H(t) \overset{(sol)}{=} T_H(0)\,(1 + p\, t/t_0)^{-\gamma_T}$$

$$= \delta \underline{u}_{\underline{k}_\perp}(0)\left[1 + p\frac{t}{t_0}\right]^{-\frac{S}{2\xi_T^{(1)*}}\gamma_T}$$

$$; \begin{cases} \dfrac{S}{2\xi_T^{(1)*}} = \dfrac{1}{2}\eta^* k^2 \dfrac{1}{2\xi_T^{(1)*}} = \dfrac{\eta^* k^2}{4\xi_T^{(0)*}} \\ \gamma_T = \xi_T^{(0)}(0)/t_0 \end{cases}$$

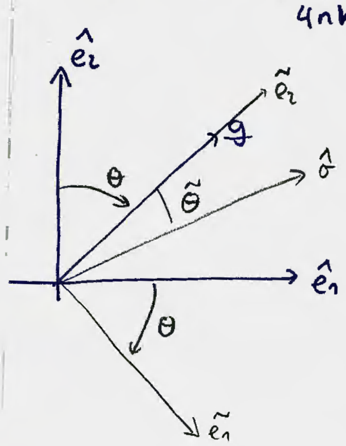
$$= \delta \underline{u}_{\underline{k}_\perp}(0)\left[1 + p\frac{t}{t_0}\right]^{-\frac{\eta^* k^2}{4\xi_T^{(0)*}}\xi_T^{(0)*} V_H(0)/t_0}$$

$$= \delta \underline{u}_{\underline{k}_\perp}(0)\left[1 + p\frac{t}{t_0}\right]^{-\frac{\eta^* k^2 V_H(0)}{4 t_0}}$$

• Calcul en dimension d=2 : (A)

$$V_\eta^{*,c} = \frac{\beta^2}{(2+2)(2-1)\,n V_0}\int_{\mathbb{R}^2} dv \; D_{ij}(v)\, L_c[\mathcal{M} D_{ij}]$$

$$\overset{(8)}{=} -m\sigma\,\frac{\beta^2}{4nV_0}\int_{\mathbb{R}^{2\times 2}} dv_1 dv_2\, f^{(0)}(v_1)\mathcal{M}(v_2)D_{ij}(v_2)\,\frac{1+\tilde\alpha}{2}\int d\hat\sigma\;\theta(g\cdot\hat\sigma)\,(g\cdot\hat\sigma)^2\Big[-g_i\sigma_j - g_j\sigma_i + (1+\tilde\alpha)(g\cdot\hat\sigma)\sigma_i\sigma_j\Big] \qquad (1)$$



$$\begin{cases}\tilde e_1 = \cos\theta\,\hat e_1 - \sin\theta\,\hat e_2\\ \tilde e_2 = \sin\theta\,\hat e_1 + \cos\theta\,\hat e_2\end{cases} \qquad \begin{cases}\hat e_1 = \cos\theta\,\tilde e_1 + \sin\theta\,\tilde e_2\\ \hat e_2 = -\sin\theta\,\tilde e_1 + \cos\theta\,\tilde e_2\end{cases} \qquad (2)$$

$$g = g_1\hat e_1 + g_2\hat e_2 = |g|\begin{pmatrix}\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix} \qquad (3)$$

$$\hat\sigma = \sigma_1\hat e_1 + \sigma_2\hat e_2 = \sin\tilde\theta\,\tilde e_1 + \cos\tilde\theta\,\tilde e_2$$
$$= \sin\tilde\theta\,(\cos\theta\,\hat e_1 - \sin\theta\,\hat e_2) + \cos\tilde\theta\,(\sin\theta\,\hat e_1 + \cos\theta\,\hat e_2)$$
$$= \hat e_1\underbrace{(\sin\tilde\theta\cos\theta + \cos\tilde\theta\sin\theta)}_{=\sigma_1} + \hat e_2\underbrace{(\cos\tilde\theta\cos\theta - \sin\tilde\theta\sin\theta)}_{=\sigma_2} \qquad (4)$$

Ainsi :

$$V_\eta^{*,c} = -\frac{m\sigma\beta^2}{4nV_0}\int_{\mathbb{R}^4} dv_1dv_2\, f^{(0)}(v_1)\mathcal{M}(v_2)D_{ij}(v_2)\,\frac{1+\tilde\alpha}{2}\int d\hat\sigma\;\theta(\cos\tilde\theta)(\cos\tilde\theta)^2|g|^2\Big[(1+\tilde\alpha)|g|\cos\tilde\theta\,\sigma_i\sigma_j - g_i\sigma_j - g_j\sigma_i\Big]$$

$$= -\frac{m\sigma\beta^2}{4nV_0}\int_{\mathbb{R}^4} dv_1dv_2\, f^{(0)}(v_1)\mathcal{M}(v_2)D_{ij}(v_2)\,\underbrace{\frac{1+\tilde\alpha}{2}|g|^2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\tilde\theta\,(\cos\tilde\theta)^2\Big[(1+\tilde\alpha)|g|\cos\tilde\theta\,\sigma_i\sigma_j - g_i\sigma_j - g_j\sigma_i\Big]}_{:=I_{ij}} \qquad (5)$$

On a 3 composantes indépendantes de I_{ij} :

• $i=j=1$:

$$I_{11} = \frac{1+\tilde\alpha}{2}|g|^2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\tilde\theta\,(\cos\tilde\theta)^2\Big[(1+\tilde\alpha)|g|\cos\tilde\theta\big(\sin\tilde\theta^2\cos\theta^2 + \cos\tilde\theta^2\sin\theta^2 + 2\sin\tilde\theta\cos\tilde\theta\cos\theta\sin\theta\big) - 2g_1\sin\tilde\theta\cos\theta - 2g_1\cos\tilde\theta\sin\theta\Big]$$

$$= \frac{1+\tilde\alpha}{2}|g|^2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\tilde\theta\Big[(1+\tilde\alpha)|g|\big(\overbrace{\sin\tilde\theta^2\cos\tilde\theta^3}^{\to 4/15}\cos\theta^2 + \overbrace{\cos\tilde\theta^5}^{\to 16/15}\sin\theta^2 + 2\overbrace{\sin\tilde\theta\cos\tilde\theta^4}^{\to 0}\cos^2\theta\big) - 2g_1\overbrace{\sin\tilde\theta\cos\tilde\theta^2}^{\to 0}\cos\theta - 2g_1\underbrace{\cos\tilde\theta^3}_{\to 4/3}\sin\theta\Big]$$

$$= \frac{1+\tilde\alpha}{2}|g|\Big[(1+\tilde\alpha)\frac{1}{15}\big(4\underbrace{|g|^2\cos^2\theta}_{=|g|^2-|g|^2\sin^2\theta} + 16\underbrace{|g|^2\sin^2\theta}_{=g_1^2}\big) - 2g_1\frac{4}{3}\underbrace{|g|\sin\theta}_{=g_1}\Big]$$

$$= \frac{1+\tilde\alpha}{2}|g|\Big[\frac{4}{15}(1+\tilde\alpha)\big(|g|^2 - g_1^2 + 4g_1^2\big) - \frac{8}{3}g_1^2\Big]$$

$$= \frac{1+\tilde\alpha}{2}|g|^3\frac{4}{15}(1+\tilde\alpha) + \frac{1+\tilde\alpha}{2}|g|g_1g_1\Big[(1+\tilde\alpha)\frac{12}{15} - \frac{40}{15}\Big]$$

$$= \frac{1+\tilde\alpha}{2}|g|g_1^2\,(12-40+12\tilde\alpha)\frac{1}{15} + 2\frac{(1+\tilde\alpha)^2}{15}|g|^3$$

$$= -\frac{1+\tilde\alpha}{2}|g|g_1^2\,\frac{28-12\tilde\alpha}{15} + \frac{2}{15}(1+\tilde\alpha)^2|g|^3$$

$$= -\frac{2}{15}(1+\tilde\alpha)(7-3\tilde\alpha)|g|g_1^2 + \frac{2}{15}(1+\tilde\alpha)^2|g|^3 \qquad (6)$$

• $i=j=2$:

$$I_{22} = \frac{1+\tilde\alpha}{2}|g|^2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\tilde\theta\,\cos\tilde\theta^2\Big[(1+\tilde\alpha)|g|\cos\tilde\theta\big(\cos\tilde\theta^2\sin\theta^2 + \sin\tilde\theta^2\cos\theta^2 - 2\cos\tilde\theta\overbrace{\sin\tilde\theta}^{0}\cos\theta\sin\theta\big) - 2g_2\cos\tilde\theta\cos\theta + 2g_2\sin\tilde\theta\sin\theta\Big]$$

$$= \frac{1+\tilde\alpha}{2}|g|^2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\tilde\theta\Big[(1+\tilde\alpha)|g|\big(\overbrace{\cos\tilde\theta^5}^{\to 16/15}\cos\theta^2 + \overbrace{\cos\tilde\theta^3\sin\tilde\theta^2}^{\to 4/15}\sin\theta^2\big) - 2g_2\underbrace{\cos\tilde\theta^3}_{\to 4/3}\cos\theta\Big]$$

$$= -\frac{2}{15}(1+\tilde\alpha)(7-3\tilde\alpha)|g|g_2^2 + \frac{2}{15}(1+\tilde\alpha)^2|g|^3\,, \qquad (7)$$

car c'est la même expression qu'une étape intermédiaire du calcul précédent, en échangeant $\cos\theta$ et $\sin\theta$, d'où g_2^2 et non plus g_1^2.

(B)

• $i=1, j=2$:

$$I_{12} = \frac{1+\tilde\alpha}{2}|g|^2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\tilde\theta\, \cos\tilde\theta^2 \Big[(1+\tilde\alpha)|g|\cos\tilde\theta(\sin\tilde\theta\cos\theta+\cos\tilde\theta\sin\theta)(\cos\tilde\theta\cos\theta-\sin\tilde\theta\sin\theta) - g_1(\cos\tilde\theta\cos\theta-\sin\tilde\theta\sin\theta) - g_2(\sin\tilde\theta\cos\theta+\cos\tilde\theta\sin\theta)\Big]$$

$$= \frac{1+\tilde\alpha}{2}|g|^2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\tilde\theta \Big[(1+\tilde\alpha)|g|\cos\tilde\theta^3(\sin\tilde\theta\cos\tilde\theta\cos^2\theta - \sin\tilde\theta^2\cos\theta\sin\theta + \cos\tilde\theta^2\cos\theta\sin\theta - \cos\tilde\theta\sin\tilde\theta\sin^2\theta) - g_1\cos\tilde\theta^3\cos\theta - g_2\cos\tilde\theta^3\sin\theta\Big]$$

$$= \frac{1+\tilde\alpha}{2}|g|^2\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\tilde\theta \Big[(1+\tilde\alpha)|g|\big(\underbrace{\cos\tilde\theta^5}_{\to 16/15}\cos\theta\sin\theta - \underbrace{\cos\tilde\theta^3\sin\tilde\theta^2}_{\to 4/15}\cos\theta\sin\theta\big) - g_1\underbrace{\cos\tilde\theta^3}_{\to 4/3}\cos\theta - g_2\underbrace{\cos\tilde\theta^3}_{\to 4/3}\sin\theta\Big]$$

$$= \frac{1+\tilde\alpha}{2}|g| \Big[(1+\tilde\alpha)\frac{4}{15}\big(4\underbrace{|g|\cos\theta\,|g|\sin\theta}_{=g_1g_2} - \underbrace{|g|\cos\theta\,|g|\sin\theta}_{=g_1g_2}\big) - \frac{4}{3}g_1\underbrace{|g|\cos\theta}_{=g_2} - \frac{4}{3}g_2\underbrace{|g|\sin\theta}_{=g_1}\Big]$$

$$= \frac{1+\tilde\alpha}{2}|g|g_1g_2\Big[4\,\frac{1+\tilde\alpha}{15}\cdot 3 - \frac{40}{15}\Big]$$

$$= \frac{1+\tilde\alpha}{2}\,4\,\frac{3+3\tilde\alpha-10}{15}|g|g_1g_2$$

$$= \frac{2}{15}(1+\tilde\alpha)(3\tilde\alpha-7)|g|g_1g_2$$

$$= -\frac{2}{15}(1+\tilde\alpha)(7-3\tilde\alpha)|g|g_1g_2 \qquad (8)$$

Ainsi de (6), (7), et (8):

$$I_{ij} = -\frac{2}{15}(1+\tilde\alpha)(7-3\tilde\alpha)|g|g_ig_j + \frac{2}{15}(1+\tilde\alpha)^2|g|^3\delta_{ij} \qquad (9)$$

(9) dans (5) ⟹

$$V_\zeta^{*,c} = \frac{m\sigma\beta^2}{4nV_0}\int_{\mathbb{R}^4} dv_1dv_2\, f^{(0)}(v_1)\mathcal{M}(v_2)D_{ij}(v_2)\Big[\frac{2}{15}(1+\tilde\alpha)(7-3\tilde\alpha)|g|g_ig_j + \frac{2}{15}(1+\tilde\alpha)^2|g|^3\delta_{ij}\Big] \qquad (10)$$

Or comme D_{ij} est de trace nulle, alors $D_{ij}\delta_{ij}=0$ et donc:

$$V_\zeta^{*,c} = \frac{m\sigma\beta^2}{4nV_0}\int_{\mathbb{R}^4} dv_1dv_2\, f^{(0)}(v_1)\mathcal{M}(v_2)D_{ij}(v_2)\frac{2}{15}(1+\tilde\alpha)(7-3\tilde\alpha)|g|g_ig_j$$

$$= \frac{m\sigma\beta^2}{30nV_0}(1+\tilde\alpha)(7-3\tilde\alpha)\int_{\mathbb{R}^2} dv_1\, f^{(0)}(v_1)\int_{\mathbb{R}^2} dv_2\,\mathcal{M}(v_2)D_{ij}(v_2)|g|g_ig_j \qquad (11)$$

Changement de variables:

$$\begin{cases} \underline{V_1} \mapsto \underline{V} \\ \underline{V_2} \mapsto \underline{g} = \underline{V_1}-\underline{V_2} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow V_\zeta^{*,c} = \frac{m\sigma\beta^2}{30nV_0}(1+\tilde\alpha)(7-3\tilde\alpha)\int_{\mathbb{R}^2} dV\, f^{(0)}(V)\int_{\mathbb{R}^2} dg\,\mathcal{M}(\underline{V}-\underline{g})D_{ij}(\underline{V}-\underline{g})|g|g_ig_j \qquad (12)$$

Avec:

$$\mathcal{M}(\underline{V}-\underline{g}) = \frac{n}{V_T^2}\frac{1}{\pi}e^{-(V-g)^2/V_T^2} = \frac{n}{V_T^2}\frac{1}{\pi}e^{-V^2/V_T^2}e^{-g^2/V_T^2}e^{2(V\cdot g)/V_T^2} \qquad (13)$$

$$D_{ij}(\underline{V}-\underline{g})g_ig_j = m\Big[(V-g)_i(V-g)_j - \frac{1}{2}(V-g)^2\delta_{ij}\Big]g_ig_j$$

$$= m\Big(\underbrace{V_iV_jg_ig_j}_{=(V\cdot g)^2} + \underbrace{g_ig_jg_ig_j}_{=g^4} - \underbrace{V_ig_jg_ig_j}_{=(V\cdot g)g^2} - \underbrace{V_jg_ig_ig_j}_{=(V\cdot g)g^2} - \frac{1}{2}V^2\underbrace{\delta_{ij}g_ig_j}_{=g^2} - \frac{1}{2}g^2\underbrace{\delta_{ij}g_ig_j}_{=g^2} + (V\cdot g)\underbrace{g_ig_j\delta_{ij}}_{=g^2}\Big)$$

$$= m\Big((V\cdot g)^2 + g^4 - (V\cdot g)g^2 - \frac{1}{2}V^2g^2 - \frac{1}{2}g^4\Big)$$

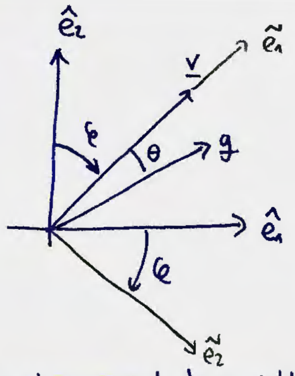
$$= m\Big((V\cdot g)^2 - (V\cdot g)g^2 + \frac{1}{2}g^4 - \frac{1}{2}V^2g^2\Big) \qquad (14)$$

(13) et (14) dans (12) ⟹

$$V_\zeta^{*c} = \frac{m^2\sigma\beta^2}{30\cancel{n}V_0}(1+\tilde\alpha)(7-3\tilde\alpha)\int_{\mathbb{R}^2} dV\, f^{(0)}(V)\int_{\mathbb{R}^2} dg\,\frac{\cancel{n}}{V_T^2}\frac{1}{\pi}e^{-V^2/V_T^2}e^{-g^2/V_T^2}e^{2(V\cdot g)/V_T^2}|g|\Big[(V\cdot g)^2-(V\cdot g)g^2+\frac{1}{2}g^4-\frac{1}{2}V^2g^2\Big]$$

$$\underset{g:=V_Tg}{\overset{V:=V_TV}{=}} \frac{m^2\sigma\beta^2}{30V_0}\frac{1}{V_T^2}\frac{1}{\pi}(1+\tilde\alpha)(7-3\tilde\alpha)V_T^4\int_{\mathbb{R}^2} dV\, f^{(0)}(V_TV)e^{-V^2}\int_{\mathbb{R}^2} dg\,|g|e^{-g^2}e^{+2(V\cdot g)}V_TV_T^4\Big[(V\cdot g)^2-(Vg)g^2+\frac{1}{2}g^4-\frac{1}{2}V^2g^2\Big]$$

Ⓒ



$$V_\eta^{*c} = \frac{m^2\sigma\beta^2}{30 V_0 \pi}(1+\tilde{\alpha})(7-3\tilde{\alpha}) V_T^7 \int_0^\infty dx\, f^{(0)}(V_T x) e^{-x^2} \times \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{=2\pi} \int_0^\infty dg\, e^{-g^2} g^2 \int_0^{2\pi} d\theta\, e^{2gX\cos\theta} \left[x^2 g^2 \cos^2\theta - x g^3 \cos\theta + \tfrac{1}{2} g^4 - \tfrac{1}{2} x^2 g^2\right]$$

$$= \frac{m^2\sigma\beta^2}{15 V_0}(1+\tilde{\alpha})(7-3\tilde{\alpha}) V_T^7 \int_0^\infty dx\, f^{(0)}(V_T x) e^{-x^2} \times \int_0^\infty dg\, e^{-g^2} g^4 \int_0^{2\pi} d\theta\, e^{2gx\cos\theta} \left[x^2\cos^2\theta - xg\cos\theta + \tfrac{1}{2} g^2 - \tfrac{1}{2} x^2\right] \qquad (15)$$

Soit le changement de variables $Y = \cos\theta$, alors $dy = -\sin\theta\, d\theta$, et donc

$$d\theta = -\frac{1}{\sin\theta} dy = -\frac{1}{\sin\arccos y} dy = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}} dy \qquad (16)$$

Ainsi (15) devient :

$$V_\eta^{*c} = \frac{m^2\sigma\beta^2}{15 V_0} V_T^7 (1+\tilde{\alpha})(7-3\tilde{\alpha}) \int_0^\infty dx\, \underbrace{f^{(0)}(V_T x)}_{= \frac{n}{V_T^2}\frac{1}{\pi} e^{-x^2}\left[1 + a_2 S_2(x^2)\right]} e^{-x^2} \times \int_0^\infty dg\, e^{-g^2} g^4 \underbrace{2\int_{-1}^{1} dy \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} e^{2gxy} \left[x^2 y^2 - xgy + \tfrac{1}{2} g^2 - \tfrac{1}{2} x^2\right]}_{= \text{ Mathematica} \Rightarrow \text{Bessel}}$$

$S_2(x^2) \overset{d=2}{=} \frac{1}{2}x^4 - 2x^2 + 1$

Mathematica:

$$e^{1/2} \frac{\pi^{3/2}}{4096} \left[(a_2 - 32)\sqrt{2\pi}\, \left(37\, \text{BesselI}[0, 1/2] + 21\, \text{BesselI}[1, 1/2]\right) + 32 \left((196 + 43 a_2)\, \text{BesselI}[0, 1/2] + 12 (9 + 2a_2)\, \text{BesselI}[1, 1/2] \right) \right]$$

$$= \frac{m^2\sigma\beta^2}{15 V_0} \frac{n}{\pi^{1/2}} V_T^5 (1+\tilde{\alpha})(7-3\tilde{\alpha}) \cdot \{\text{Mathematica}\}$$

$$; V_0 = \frac{n k_B T}{\nu_0} = n k_B T \frac{8}{d+2} \frac{\pi^{(d-1)/2}}{\Gamma(d/2)} \frac{\sigma^{d-1}}{\sqrt{m k_B T}} \overset{d=2}{=} 2 n k_B T \pi^{1/2} \sigma \frac{1}{\sqrt{m k_B T}} = 2\sigma\pi^{1/2} n \sqrt{\frac{k_B T}{m}}$$

$$= \frac{\cancel{m^2}\,\cancel{\sigma}\,\cancel{\beta^2}\,\cancel{n}}{15\pi^{1/2}} \left(\frac{2}{\cancel{\beta m}}\right)^2 \sqrt{\frac{2}{\cancel{\beta m}}} \frac{1}{2\cancel{\sigma}\pi^{1/2}\cancel{n}} \cancel{\sqrt{\frac{m}{k_B T}}} (1+\tilde{\alpha})(7-3\tilde{\alpha}) \{\ldots\}$$

$$= \frac{\cancel{4}\,2}{15} \frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}\pi} (1+\tilde{\alpha})(7-3\tilde{\alpha}) \{\ldots\}$$

$$= (1+\tilde{\alpha})(7-3\tilde{\alpha}) \frac{2}{15} \frac{\sqrt{2}}{\pi} \{\text{Mathematica}\} \qquad (17)$$

<u>Brey</u> :

$$V_\eta^{*c} = \frac{(3 - 3\tilde{\alpha} + 4)(1+\tilde{\alpha})}{8} \left(1 - \frac{1}{64} 2a_2\right) = (1+\tilde{\alpha})(7-3\tilde{\alpha}) \frac{1}{8}\left(1 - \frac{1}{64} a_2\right) \qquad (18)$$

<u>Comparaison numérique</u> :

Eq. (17) : $V_\eta^{*c} = (1+\tilde{\alpha})(7-3\tilde{\alpha})\left(0.534\ldots + 0.238\ldots\ a_2\right)$

Eq. (18) : $V_\eta^{*c} = (1+\tilde{\alpha})(7-3\tilde{\alpha})\left(0.125 - 0.015625\ a_2\right)$

Premier travail – Erreurs

Remarque : ce serait très simple de généraliser à un coefficient de restitution $\alpha < 1$
en rouge

C.E. 1

$f^{(n)} = f_M (1 + \frac{1}{2} S_i)$

• Chapman-Enskog pour l'annihilation balistique et coefficients de transport.

Opérateur d'annihilation : $T_a^{\nu}(i,j) = \sigma^{d-1} \int d\hat\sigma \, (\hat\sigma \cdot v_{ij}) \, \theta(-\hat\sigma \cdot v_{ij}) \, \delta(r_{ij} + \sigma\hat\sigma)$

Opérateur de collision : $T_c^{\nu}(i,j) = \sigma^{d-1} \int d\hat\sigma \, (\hat\sigma \cdot v_{ij}) \, \theta(-\hat\sigma \cdot v_{ij}) \, (b^{-1} - 1) \, \delta(r_{ij} - \sigma\hat\sigma)$; $b^{-1} v_{ij} = v_{ij} + 2 (v_{ij} \cdot \hat\sigma)\hat\sigma$; $b v_{ij} = v_{ij} - 2 (v_{ij} \cdot \hat\sigma)\hat\sigma$

Opérateur d'annihilation probabiliste :

$T^{\nu}(i,j) \rightarrow p \, T_a^{\nu}(i,j) + (1-p) \, T_c^{\nu}(i,j)$

Equation de Boltzmann : déjà dans l'approximation du chaos moléculaire :

$$(\partial_t + v_1 \partial_{r_1}) f(1,t) = \int d2 \, (p \, T_a^{\nu}(12) + (1-p) T_c^{\nu}(12)) \, f(1,t) \, f(2,t) = p \, J_a[f,f] + (1-p) \, J_c[f,f]$$

$J_a[f,f] = \int d2 \, T^{\nu}(1,2) f(1,t) f(2,t)$

$J_c[f,f] = \int d2 \, T_c^{\nu}(1,2) f(1,t) f(2,t)$

On établit normalement les invariants de collision par intégration de l'équation de Boltzmann sur les différents moments. Or comme T_c^{ν} est un opérateur qui a les 5 invariants de collision usuels (le coefficient de restitution est égal à 1), sa contribution sera nulle, de sorte que seul $J_a[f,f]$ entre en compte. L'équation de Boltzmann se simplifie :

$$J_a[f,f] = \int dr_2 \int dv_2 \, \sigma^{d-1} \int d\hat\sigma \, (\hat\sigma \cdot v_{ij}) \, \theta(-\hat\sigma \cdot v_{ij}) \, \delta(r_{12} - \sigma\hat\sigma) \, f(r_1, v_1, t) \, f(r_2, v_2, t)$$
$$= \sigma^{d-1} f(r_1, v_1, t) \int dv_2 \int d\hat\sigma \, \theta(-\hat\sigma \cdot v_{ij}) (\hat\sigma \cdot v_{ij}) \underbrace{\int dr_2 \, f(r_2, v_2, t) \, \delta(r_{12} - \sigma\hat\sigma)}_{= f(r_1 + \sigma, v_2, t) \simeq f(r_1, v_2, t), \ \sigma \text{ petit}}$$
$$= -\sigma^{d-1} f(r_1, v_1, t) \int dv_2 \int d\hat\sigma \, \theta(\hat\sigma \cdot v_{ij}) (\hat\sigma \cdot v_{ij}) \, f(r_1, v_2, t)$$

$$J_c[f,f] = \int dr_2 \int dv_2 \, \sigma^{d-1} \int d\hat\sigma \, (\hat\sigma \cdot v_{ij}) \, \theta(-\hat\sigma \cdot v_{ij}) \, (b^{-1} - 1) \, f(r_1, v_1, t) f(r_2, v_2, t) \, \delta(r_{12} - \sigma\hat\sigma)$$
$$= \sigma^{d-1} \int dv_2 \int d\hat\sigma \, \theta(-\hat\sigma \cdot v_{ij}) (\hat\sigma \cdot v_{ij}) (b^{-1} - 1) \, f(r_1, v_1, t) \, f(r_1, v_2, t).$$

On a l'identité (c.f. Brey, Dufty et al.) :

$$\int dv_1 \, h(v_1) J_c[f,f] = \sigma^{d-1} \int dv_2 \int dv_1 \, f(r, v_1, t) f(r, v_2, t) \int d\hat\sigma \, \theta(\hat\sigma \cdot \hat v_{12}) \, (\hat\sigma \cdot v_{12}) \, (b - 1) \, h(v_1)$$; b^{-1} : $v_1' = v_1 - (v_{12} \cdot \hat\sigma)\hat\sigma$, $v_2' = v_2 + (v_{12} \cdot \hat\sigma)\hat\sigma$

$$\int dv_1 \, h(v_1) J_a[f,f] = -\sigma^{d-1} \int dv_2 \int dv_1 \, f(r, v_1, t) f(r, v_2, t) \int d\hat\sigma \, \theta(\hat\sigma \cdot v_{12}) \, (\hat\sigma \cdot v_{12}) \, h(v_1)$$
$$= -\sigma^{d-1} \int d\hat\sigma \, \theta(\hat\sigma \cdot \hat v_{12}) (\hat\sigma \cdot \hat v_{12}) \int dv_1 \int dv_2 \, f(r, v_1, t) f(r, v_2, t) \, |v_{12}| \, h(v_1)$$
$$= -\sigma^{d-1} \int d\hat\sigma \, \theta(\hat\sigma \cdot \hat v_{12}) (\hat\sigma \cdot \hat v_{12}) \int dv_1 \, f(r, v_1, t) \, h(v_1) \int dv_2 \, f(r, v_2, t) \, |v_{12}|$$

Ainsi :

$$\int dv_1 \, 1 \, J_a[f,f] = -\sigma^{d-1} \int d\hat\sigma \, \theta(\hat\sigma \cdot v_{12}) (\hat\sigma \cdot \hat v_{12}) \int dv_1 \, f(r, v_1, t) \int dv_2 \, f(r, v_2, t) \, |v_{12}|$$
$$= -\sigma^{d-1} \left(\int d\hat\sigma \, \theta(\hat\sigma \cdot v_{12}) (\hat\sigma \cdot \hat v_{12}) \right) \int dv_2 \, f(r, v_2, t) \int dv_1 \, f(r, v_1, t) \, |v_{12}|$$
$$= -\int dv_1 \, \nu(v_1, t) \, f(r, v_1, t) \quad ; \quad \nu(v_1, t) = \sigma^{d-1} \left(\int d\hat\sigma \, (\hat\sigma \cdot \hat v_{12}) \, \theta(\hat\sigma \cdot v_{12}) \right) \int dv_2 \, |v_{12}| \, f(r, v_2, t)$$
$$:= -\omega(t)$$

$\int dv_1 \, m v_1 \, J_a[f,f] = 0$ (symétrie)

$$\int dv_1 \, \tfrac{1}{2} m v_1^2 \, J_a[f,f] = -\sigma^{d-1} \tfrac{1}{2} m \int dv_1 \int dv_2 \int d\hat\sigma \, \theta(\hat\sigma \cdot v_{12}) (\hat\sigma \cdot v_{12}) f(r, v_1, t) f(r, v_2, t) \, v_1^2 = -\tfrac{1}{2} m \int dv_1 \, \nu(v_1, t) \, v_1^2 f(r, v_1, t)$$
$$= -\tfrac{1}{2} m \int dv_1 \, \sigma^{d-1} \left(\int d\hat\sigma \, \theta(\hat\sigma \cdot v_{12}) (\hat\sigma \cdot v_{12}) \right) \int dv_2 \, |v_{12}| \, f(r, v_2, t) \, v_1^2 f(r, v_1, t)$$
$$= -\tfrac{1}{2} m \int dv_1 \, \nu(v_1, t) \, v_1^2 f(r, v_1, t)$$
$$= -\tfrac{1}{2} m \int dv_1 \, \nu(v_1, t) \, v_1^2 f(r, v_1, t) \cdot \frac{\omega(t)}{\omega(t)} \cdot \int dv_1 \, v_1^2 f(r, v_1, t) / \int dv_1 \, v_1^2 f(r, v_1, t)$$ } aurait permis de mettre un paramètre de perte d'énergie $\alpha(r,t)$ mais pas intéressant car dépend de r et de t $\neq$ constante.

Notons $\omega[f,g] = \int dv_1 \, \nu(v_1, t) \, g(r, v_1, t)$, alors :

$\int dv_1 \, J_a[f,f] = -\omega[f,f]$; $\omega[f,g] = \int dv_1 \, \nu(v_1, t) \, g(r, v_1, t)$; $\nu(v_1, t) = \sigma^{d-1} \left(\int d\hat\sigma \, (\hat\sigma \cdot \hat v_{12}) \, \theta(\hat\sigma \cdot v_{12}) \right) \int dv_2 \, |v_{12}| \, f(r, v_2, t)$

$\int dv_1 \, \tfrac{1}{2} m v_1^2 \, J_a[f,f] = -\tfrac{1}{2} m \, \omega[f, v_1^2 f]$

Avec :

$$\omega[f,g] = \sigma^{d-1} \beta_1 \int dv_1 \int dv_2 \, |v_{12}| \, f(r, v_1, t) \, g(r, v_2, t) \quad ; \quad \beta_1 = \pi^{\frac{d-1}{2}} / \Gamma\!\left(\tfrac{d+1}{2}\right)$$

Les lois de conservation sont donc : $\int dv_1$ de l'éqn. de Boltz. $\Rightarrow$

$\int dv_1 \, \partial_t f + \int dv_1 \, v \nabla_r f = \int dv_1 \, J_a[f,f]$

$\Rightarrow \partial_t n + \int dv_1 \, \nabla_r (v \cdot f) = -\omega[f,f] \cdot p$

$\Rightarrow \partial_t n + \nabla_r \int dv_1 \, v \cdot f = -\omega[f,f] \cdot p$, $n = \int dv \, f$; $u = \frac{1}{n} \int dv \, v f \Rightarrow n \cdot u = \int dv \, v f$

$\Rightarrow \partial_t n + \nabla_r (n \cdot u) = -\omega[f,f] \cdot p$

$\Rightarrow \partial_t n + n \nabla_r u + u \nabla_r n = -\omega[f,f] \cdot p$

$\Rightarrow D_t n + n \nabla u = -\omega[f,f] \cdot p$; $D_t = \partial_t + u \nabla_r$

Impulsion : ~~conservée~~ : $\int dv_1 \, v_1$ (cf. références [2,3])

$D_t u_i + \frac{1}{mn} \nabla_j P_{ij} = 0$; $P_{ij} = \frac{n}{\beta} \delta_{ij} + \int dv \, D_{ij}(V) f$; $D_{ij} = m \left(V_i V_j - \frac{1}{d} V^2 \delta_{ij}\right)$; $V = v - u$

$D_t T + \frac{2}{3 n k_B} (P_{ij} \nabla_j u_i + \nabla q) = p \frac{2}{3 n k_B} \int dv_1 \, \tfrac{1}{2} m v_1^2 \, J_a[f,f] = -\frac{2}{3 n k_B} \frac{1}{2} m \, \omega[f, v_1^2 f] = -\frac{m}{3 n k_B} \omega[f, v_1^2 f]$

Conclusion :

① $D_t n + n \nabla u = -\omega_a[f,f] \cdot p$; $P_{ij} = \frac{n}{\beta} \delta_{ij} + \int dv \, D_{ij}(V) f(r, v, t)$; $\beta = \frac{1}{k_B T}$; $D_{ij} = m \left(V_i V_j - \frac{1}{d} V^2 \delta_{ij}\right)$

② $D_t u_i + \frac{1}{mn} \nabla_j P_{ij} =$ ~~0~~ $p \cdot \omega_a[f, v_1 f] \frac{1}{n}$; $q = \int dv \, S(V) f(r, v, t)$; $S(V) = \left(\frac{m}{2} V^2 - \frac{d+2}{2\beta}\right) V$; $V = v - u$

③ $D_t T + \frac{2}{3 n k_B} (P_{ij} \nabla_j u_i + \nabla q) = -\underbrace{\frac{m}{3 n k_B} \omega_a[f, v_1^2 f]}_{:= T \zeta_a} \cdot p$ $- T \zeta_c^{(0)} (1-p)$; $\omega_a[f,g] = \sigma^{d-1} \beta_1 \int dv_1 \int dv_2 \, |v_{12}| \, f(r, v_1, t) \, g(r, v_2, t)$; $\beta_1 = \pi^{\frac{d-1}{2}} / \Gamma\!\left(\frac{d+1}{2}\right)$

↳ $p = 0 \Rightarrow$ fluide ok...

$u = \int dv \, v f(r, v, t)$; $D_t = \partial_t + u \nabla_r$

$\zeta_c = (1 - \alpha^2) \frac{m}{3 n k_B T} \omega_c[f,f]$; $\omega_c[f,g] = \frac{\beta_1 \sigma^{d-1}}{8} \int dv_1 \int dv_2 \, |v_{12}|^3 f(r, v_1, t) \, g(r, v_2, t)$

Chapman-Enskog : $f(r, v, t) = f(n, u, T)$

$f = \sum_{k \geq 0} \varepsilon^k f^{(k)}$; $\partial_t = \sum_{k \geq 0} \varepsilon^k \partial_t^{(k)}$ + gradients d'ordre 1 en ε (cf. Brey p. 99) ; $f^{(0)} = n \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{d/2} \exp\!\left(-\frac{m}{2 k_B T} (v-u)^2\right)$

• $O(\varepsilon^0)$:

① $\partial_t n + u \nabla n^{\,0} + n \nabla u^{\,0} = -\omega_a[f,f] \cdot p = -p \, \omega_a[f^{(0)}, f^{(0)}] \Rightarrow \partial_t^{(0)} n = -p \, \omega_a[f^{(0)}, f^{(0)}]$

② $\partial_t^{(0)} u_i = 0 \quad \forall i = 1, \ldots, d$

③ $\partial_t^{(0)} T = -T \zeta_a^{(0)} p - T \zeta_c^{(0)} (1-p)$; $\zeta_a^{(0)} = \frac{m}{3 n k_B T} \omega[f^0, v_1^2 f^0] \Rightarrow T^{-1} \partial_t^{(0)} T = -p \, \zeta_a^{(0)} - (1-p) \, \zeta_c^{(0)}$

L'équation de Boltzmann est à cet ordre :

$\partial_t^{(0)} f^{(0)} = p \, J_a[f^{(0)}, f^{(0)}] + (1-p) \, J_c[f^{(0)}, f^{(0)}]$ (1)

Or : $\frac{\partial}{\partial t} f^{(0)} = \frac{\partial f^{(0)}}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial f^{(0)}}{\partial T} \cdot \partial_t^{(0)} T = \partial_T f^{(0)} \cdot (-T p \, \zeta_a^{(0)} - T \zeta_c^{(0)} (1-p)) = -p \, T \, \zeta_a^{(0)} \partial_T f^{(0)} - (1-p) \, T \zeta_c^{(0)} \partial_T f^{(0)}$ (2)

De plus, comme $f^{(0)}$ est une fct qui ne dépend de la vitesse que par le rapport sans dimension V/v_0, $v_0 = \sqrt{2/\beta m}$ étant la vitesse thermique, alors la dépendance de $f^{(0)}$ en la température est de la forme :

$T^{-d/2} \tilde f^{(0)}(V / T^{1/2})$

donc on vérifie par un calcul direct que :

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial V}(V f^{(0)}) = -T\frac{\partial}{\partial T} f^{(0)} \qquad ; \frac{\partial}{\partial V} = \nabla_V \qquad (3)$$

En effet :

$$-T\frac{\partial}{\partial T}f^{(0)} = -T\frac{\partial}{\partial T}\left(T^{-d/2}\tilde{f}^{(0)}(V/T^{1/2})\right) = f^{(0)}\left(\frac{d}{2}+\frac{1}{2}V/T^{1/2}\right)$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial V}(Vf^{(0)}) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d}\frac{\partial}{\partial V_i}V_i f^{(0)} = f^{(0)}\left(\frac{d}{2}+\frac{1}{2}V/T^{1/2}\right)$$

(2) et (3) dans (1) ⇒

$$-p\cdot T\,\zeta_a^{(0)}\partial_T f^{(0)} = +\left(p\,\zeta_a^{(0)} + (1-p)\zeta_c^{(0)}\right)\left(-T\partial_T f^{(0)}\right) = \frac{1}{2}\left(p\,\zeta_a^{(0)} + (1-p)\zeta_c^{(0)}\right)\nabla_V(Vf^{(0)})$$

(en rouge : $-(1-p)T\zeta_c^{(0)}\partial_T f^{(0)}$)

$$\Longrightarrow \frac{1}{2}\left(p\,\zeta_a^{(0)} + (1-p)\zeta_c^{(0)}\right)\nabla_V(Vf^{(0)}) = p\,J_a[f^{(0)},f^{(0)}] + (1-p)\,J_c[f^{(0)},f^{(0)}] \quad ; \quad \zeta^{(0)} = \frac{m}{3nk_BT}\,\omega[f^{(0)}, V_1^2 f^{(0)}] \qquad ⊛$$

La solution $f^{(0)}$ étant isotrope, alors :

$$P_{ij}^{(0)} = p_0\,\delta_{ij} \quad ; \quad p_0 = n k_B T \quad \text{(press. hydrostatique)}$$
$$q^{(0)} = 0$$

• $O(\varepsilon^1)$: l'équation de Boltzmann à cet ordre est

$$\partial_t^{(0)} f^{(1)} + \partial_t^{(1)} f^{(0)} + V\nabla f^{(0)} = L f^{(1)} \qquad ; \quad L f^{(1)} = p\,J_a[f^{(0)},f^{(1)}] + p\,J_a[f^{(1)},f^{(0)}] + (1-p)\,J_c[f^{(0)},f^{(1)}] + (1-p)\,J_c[f^{(1)},f^{(0)}]$$

$$\Longrightarrow (\partial_t^{(0)}+L)f^{(1)} = -(D_t^{(1)} + V\cdot\nabla)f^{(0)} \quad ; \quad D_t^{(1)} = \partial_t^{(1)} + u\cdot\nabla \; ; \; V = v-u \qquad (**)$$

Équations de bilan :

① $D_t^{(1)} n = -n\nabla u - p\,\omega_a[f^{(0)},f^{(1)}] - p\,\omega_a[f^{(1)},f^{(0)}] = -n\nabla u - p\cdot 2\cdot\omega_a[f^{(0)},f^{(1)}]$ (noté $\omega_a^{(1)}$)

② $D_t^{(1)} u_i = -(m\cdot n)^{-1}\nabla_j P_{ij} \overset{O(\varepsilon^1)}{=} -(m\cdot n)^{-1}\nabla_j(p_0\delta_{ij}) = -(m\cdot n)^{-1}\nabla_i p_0$

③ $D_t^{(1)} T = -\frac{2}{3nk_B}(P_{ij}\nabla_j u_i + \nabla q) - pT\zeta_a^{(0)}[f^{(0)},f^{(1)}] - T\zeta_a^{(0)}[f^{(1)},f^{(0)}]\cdot p = -\frac{2}{3}T\nabla u - T\left(\zeta[f^{(0)},f^{(1)}] + \zeta[f^{(1)},f^{(0)}]\right)\cdot p - T(1-p)\,2\,\zeta_c[f^{(0)},f^{(1)}]$

avec $P_{ij} = p_0\delta_{ij} = nk_BT\delta_{ij}$, $q = 0$; (en rouge : $-(1-p)T\zeta_c^{(0)}[f^{(0)},f^{(1)}]\cdot 2$) ; $:= \zeta_a^{(1)}$; $= \zeta_c^{(1)}$

Insertion de ① à ③ dans l'équation de Boltzmann à l'ordre ε^1 (**) :

$$D_t^{(1)} f^{(0)} + V\nabla f^{(0)} = \partial_t^{(1)} f^{(0)} + v\nabla f^{(0)}$$

Avec : (← doit tout exprimer en termes de gradients car $f^{(1)}$ est de cette forme)

$$\partial_t^{(1)} f^{(0)} = \frac{\partial f^{(0)}}{\partial T}\cdot\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial f^{(0)}}{\partial n}\cdot\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla_u f^{(0)}\frac{\partial u}{\partial t}$$

$$\begin{cases} \partial_t T + u\nabla_r T = -\frac{2}{3}T\nabla u - T\zeta_a^{(1)}p - T\zeta_c^{(1)}(1-p) \Longrightarrow \partial_t T = -u\nabla_r T - \frac{2}{3}T\nabla_r u - T\zeta_a^{(1)}\cdot p - T\zeta_c^{(1)}(1-p) \\ \partial_t n + u\nabla_r n = -n\nabla u - 2p\,\omega_a^{(1)} \Longrightarrow \partial_t n = -u\nabla_r n - n\nabla_r u - 2p\,\omega_a^{(1)} \\ \partial_t u_i + u\nabla_r u_i = -\frac{1}{mn}\nabla_j p_0 \Longrightarrow \partial_t u_i = -u\nabla_r u_i - \frac{1}{mn}\nabla_i p_0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \partial_t^{(1)} f^{(0)} = \frac{\partial f^{(0)}}{\partial T}\left[-u\nabla_r T - \frac{2}{3}T\nabla_r u - T\zeta_{a,p}^{(1)}\right] + \frac{\partial f^{(0)}}{\partial n}\left[-u\nabla_r n - n\nabla_r u - 2p\,\omega_a^{(1)}\right] + \nabla_{u_i} f^{(0)}\left[-u\nabla_r u_i - \frac{1}{mn}\nabla_i p_0\right]$$

Avec :

$$\nabla_r f^{(0)} = \frac{\partial f^{(0)}}{\partial T}\cdot\nabla_r T + \frac{\partial f^{(0)}}{\partial n}\nabla_r n + \frac{\partial f}{\partial u_i}\nabla_r u_i$$

$$\Longrightarrow \partial_t^{(1)} f^{(0)} + v\nabla_r f^{(0)} = \frac{\partial f^{(0)}}{\partial T}\cdot\left[-\frac{2}{3}T\nabla_r u - T\zeta_a^{(1)}p - T\zeta_c^{(1)}(1-p) - u\nabla_r T + v\nabla_r T\right] + \frac{\partial f^{(0)}}{\partial n}\left[-u\nabla_r n - n\nabla_r u - 2p\,\omega_a^{(1)} + v\nabla_r n\right]$$
$$+\nabla_{u_i} f^{(0)}\left[-\frac{1}{mn}\nabla_i p_0 - u\nabla_r u_i + v\nabla_r u_i\right]$$
$$= \frac{\partial f^{(0)}}{\partial T}\left[-\frac{2}{3}T\nabla_r u - T\zeta_a^{(1)}p - T(1-p)\zeta_c^{(1)} + V\nabla_r T\right] + \frac{\partial f^{(0)}}{\partial n}\left[V\nabla_r n - n\nabla_r u - 2p\,\omega_a^{(1)}\right] + \nabla_{u_i} f^{(0)}\left[-\frac{1}{mn}\nabla_{r_i} p_0 + V\nabla_r u_i\right]$$
$$= -\zeta_a^{(1)}T\partial_T f^{(0)}p - (1-p)T\zeta_c^{(1)}\partial_T f^{(0)} - \partial_T f^{(0)}\left[\frac{2}{3}T\nabla_r u - V\nabla_r T\right] - \partial_n f^{(0)}\cdot n\left[\nabla_r u - V\nabla_r\ln(n) - 2p\,\omega_a^{(1)}/n\right] - \nabla_{u_i} f^{(0)}\left[\frac{1}{mn}\nabla_{r_i} p_0 - V\nabla_r u_i\right]$$

avec $\partial_n f^{(0)}\cdot n = f^{(0)}$ car $f^{(0)} \sim n$

L'équation de Boltzmann (**) devient donc :

$$(\partial_t^{(0)}+L)f^{(1)} - \zeta_a^{(1)}T\partial_T f^{(0)}p - \zeta_c^{(1)}T\partial_T f^{(0)}(1-p) = f^{(0)}\left[\nabla_r u - V\nabla_r\ln(n) - \frac{2p}{n}\omega_a^{(1)}\right] + \partial_T f^{(0)}\left[\frac{2}{3}T\nabla_r u - V\nabla_r T\right] + \nabla_{u_i} f^{(0)}\left[\frac{1}{m\cdot n}\nabla_{r_i} p_0 - V\nabla_r u_i\right]$$

avec :

$$\omega_a^{(1)} = \omega_a[f^{(0)},f^{(1)}] \qquad \omega_a[f,g] = \sigma^{d-1}\beta_1\int dv_1\int dv_2\,|V_{12}|\,f(r,v_1,t)\,g(r,v_2,t) \quad ; \; \beta_1 = \pi^{\frac{d-1}{2}}/\Gamma\!\left(\tfrac{d+1}{2}\right)$$

$$\zeta_a^{(1)} = \zeta_a[f^{(0)},f^{(1)}] + \zeta_a[f^{(1)},f^{(0)}] \; ; \; \zeta_c^{(1)} = 2\zeta_c[f^{(0)},f^{(1)}] \quad ; \quad \zeta[f,g] = -\frac{m}{3nkT}\,\omega[f, V_1^2 g] \quad ; \; p_0 = nk_BT \; ; \; f^{(0)} = n\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{d/2}\exp\left(-\frac{m}{2kT}(v-u)^2\right)$$

$$Lf^{(1)} = p\left(J_a[f^{(0)},f^{(1)}] + J_a[f^{(1)},f^{(0)}]\right) + (1-p)\cdot\left(J_c[f^{(0)},f^{(1)}] + J_c[f^{(1)},f^{(0)}]\right)$$

Différences avec Brey, Dufty, Santos par les collisions : présence de $\omega^{(1)}$, forme différente de L. La forme de $\omega[f,g]$ (donc aussi celle de ζ) est explicitement différente de celle de l'article de Brey, mais devrait être la même implicitement ; les résultats doivent être les mêmes dans la limite $p\to 0$, pour $\alpha = 1$ (donc toutes les lois de conservation sont vérifiées, et il faut que les contributions de ω et ζ s'annulent. C'est en effet bien le cas, car ω et ζ ont p en préfacteur. Par contre, les expressions de ω et ζ n'ont effectivement pas à être similaires à celles de l'article de Brey, car dans mon cas la non conservation est due à l'annihilation, tandis que chez Brey il s'agit de collisions inélastiques sans annihilation.

Mise en évidence des gradients :

$$(\partial_t^{(0)}+L)f^{(1)} - p\left(\zeta_a^{(1)}T\partial_T f^{(0)} - \frac{2}{n}\omega_a^{(1)}\right) - (1-p)\zeta_c^{(1)}T\partial_T f^{(0)} = f^{(0)}\left[\nabla_r u - V\nabla_r\ln(n)\right] + \partial_T f^{(0)}\left[\frac{2}{3}T\nabla_r u - V\nabla_r T\right] + \nabla_{u_i} f^{(0)}\left[\frac{1}{mn}\nabla_{r_i} p_0 - V\nabla_r u_i\right]$$

(annotations : $-Vf^{(0)}\nabla_r\ln(n)$; $-V\,T\partial_T f^{(0)}\nabla_r T\frac{1}{T} = \frac{V}{2}\nabla_V(Vf^{(0)})\nabla_r\ln(T)$, avec $T\partial_T f^{(0)} = -\frac{1}{2}\nabla_V(Vf^{(0)})$; $T\partial_T f^{(0)}\frac{2}{3}\nabla_r u = -\frac{1}{2}\nabla_V(Vf^{(0)})\ldots = -\frac{1}{3}\delta_{ij}\nabla_V(Vf^{(0)})\nabla_{r_j}u_i$; $= -\nabla_V f^{(0)}\frac{1}{mn}\nabla_{r_i}(nkT) = -\nabla_V f^{(0)}\frac{k}{m}\left[\nabla_{r_i}\ln(n)\cdot T + \nabla_{r_i}T\right] = -\nabla_V f^{(0)}\frac{1}{\beta m}\left[\nabla_{r_i}\ln(n) + \nabla_{r_i}\ln(T)\right]$)

$$= \nabla\ln(n)\cdot\left[-Vf^{(0)} - \frac{1}{\beta m}\nabla_V f^{(0)}\right] + \nabla_r\ln(T)\cdot\left[\frac{V}{2}\nabla_V(Vf^{(0)}) - \frac{1}{\beta m}\nabla_V f^{(0)}\right]$$
$$+ \nabla_j u_i\left[-\frac{1}{3}\delta_{ij}\nabla_V(Vf^{(0)})\right] + f^{(0)}\nabla_r u - V\nabla_r u_i\nabla_{u_i} f^{(0)}$$

(on vérifie que ce terme est égal à $\nabla_{V_i}(V_j f^{(0)})\nabla_{r_j}u_i$)

$$\Longrightarrow (\partial_t^{(0)}+L)f^{(1)} + p\left(\frac{2}{n}\omega_a^{(1)} - \zeta_a^{(1)}T\partial_T f^{(0)}\right) - (1-p)\zeta_c^{(1)}T\partial_T f^{(0)} = A\,\nabla_r\ln(T) + B\,\nabla_r\ln(n) + C_{ij}\nabla_j u_i \qquad (***)$$

$$A = \frac{1}{2}V\nabla_V(Vf^{(0)}) - (\beta m)^{-1}\nabla_V f^{(0)}$$
$$B = -Vf^{(0)} - (\beta m)^{-1}\nabla_V f^{(0)}$$
$$C_{ij} = \nabla_{V_i}(V_j f^{(0)}) - \frac{1}{3}\delta_{ij}\nabla_V(Vf^{(0)})$$

Ansatz de solution :

$$f^{(1)} = \mathcal{A}\cdot\nabla_r\ln(T) + \mathcal{B}\cdot\nabla\ln(n) + \mathcal{C}_{ij}\nabla_i u_j$$

Application de l'opérateur $\partial_t^{(0)}$ sur $f^{(1)}$:

$$\partial_t^{(0)} f^{(1)} = \partial_t^{(0)}\left(\mathcal{A}\nabla_r\ln(T) + \mathcal{B}\nabla_r\ln(n) + \mathcal{C}_{ij}\nabla_i u_j\right)$$
$$= \mathcal{A}\,\partial_t^{(0)}\nabla_r\ln(T) + \nabla_r\ln(T)\,\partial_t^{(0)}\mathcal{A} + \mathcal{B}\,\partial_t^{(0)}\nabla_r\ln(n) + \nabla_r\ln(n)\,\partial_t^{(0)}\mathcal{B} + \mathcal{C}_{ij}\,\partial_t^{(0)}\nabla_i u_j + \nabla_i u_j\,\partial_t^{(0)}\mathcal{C}_{ij} \quad ; \; \partial_t^{(0)} = \partial_t T\partial_T + \partial_t n\,\partial_n + \partial_t u\,\nabla_u$$

avec $\partial_t^{(0)}\nabla_r\ln(T) = \nabla_r(T^{-1}\partial_t^{(0)}T) = -\nabla_r\zeta_a^{(0)}p - \nabla_r\zeta_c^{(0)}(1-p)$; $\partial_t^{(0)}\nabla_r\ln(n) = \nabla_r\partial_t^{(0)}\ln(n) = \nabla_r(n^{-1}\partial_t^{(0)}n) = \nabla_r(n^{-1}(-p)\,\omega[f^{(0)},f^{(0)}])$; $\partial_t^{(0)}\nabla_i u_j = \nabla_i\partial_t^{(0)}u_j = 0$

$$= -\mathcal{A}\,p\,\nabla_r\zeta_a^{(0)} - \mathcal{A}(1-p)\nabla_r\zeta_c^{(0)} - \mathcal{B}\,p\,\nabla_r\left(\frac{1}{n}\omega_a[f^{(0)},f^{(0)}]\right) + \nabla_r\ln(T)\left[\partial_t T\partial_T + \partial_t n\,\partial_n + \partial_t u\,\nabla_u\right]\mathcal{A} + \nabla_r\ln(n)\left[\partial_t T\partial_T + \partial_t n\,\partial_n + \partial_t u\,\nabla_u\right]\mathcal{B}$$
$$+ \nabla_i u_j\left[\partial_t T\partial_T + \partial_t n\,\partial_n + \partial_t u\,\nabla_u\right]\mathcal{C}_{ij}$$

(avec $\partial_t T = -pT\zeta_a^{(0)} - (1-p)T\zeta_c^{(0)}$, $\partial_t n = -p\,\omega_a[f^{(0)},f^{(0)}]$, $\partial_t u = 0$)

$$= -\mathcal{A}\,p\,\nabla_r\zeta_a^{(0)} - \mathcal{A}(1-p)\nabla_r\zeta_c^{(0)} - \mathcal{B}\,p\,\nabla_r\left(\frac{1}{n}\omega_a[f^{(0)},f^{(0)}]\right) - p\,\nabla_r\ln(T)\left[T\zeta_a^{(0)}\frac{\partial}{\partial T} + \omega_a[f^{(0)},f^{(0)}]\frac{\partial}{\partial n}\right]\mathcal{A} - p\,\nabla_r\ln(n)\left[T\zeta_a^{(0)}\frac{\partial}{\partial T} + \omega_a[f^{(0)},f^{(0)}]\frac{\partial}{\partial n}\right]\mathcal{B}$$
$$-p\,\nabla_i u_j\left[T\zeta_a^{(0)}\frac{\partial}{\partial T} + \omega_a[f^{(0)},f^{(0)}]\frac{\partial}{\partial n}\right]\mathcal{C}_{ij} \qquad (4)$$

(en rouge : $+\frac{(1-p)}{p}T\zeta_c^{(0)}\partial_T$ dans chaque crochet)

~~Néanmoins $\zeta_a^{(0)}$ et $\omega_a[f^{(0)},f^{(0)}]$ sont connus, donc on peut calculer leur ∇_r~~

~~$\omega_a[f^{(0)},f^{(0)}] = \text{cte}\cdot\int dv_1\int dv_2\,|V_{12}|\,n/T^{d/2}\,n/T^{d/2}\exp\left(-\frac{\beta}{2}(v_1-u)^2\right)\exp\left(-\frac{\beta}{2}(v_2-u)^2\right)$~~

~~$= \text{cte}\cdot n^2/T^{d}\int dv_{12}\,|V_{12}|\,e^{-V_{12}^2/T}\,e^{-V_{12}^2/T}$~~

Pour ceci on utilise :

$$I_n = \int_{\mathbb{R}^d} dx_1 \int_{\mathbb{R}^d} dx_2\, (x_1-x_2)^n e^{-\alpha(x_1-u)^2} e^{-\alpha(x_2-u)^2}$$; $y_i = x_i - u$, puis $c_{12} = y_1 - y_2$, $C = 1/2(y_1+y_2)$, $J=1$; $y_1^2+y_2^2 = 2C^2 + 1/2\, c_{12}^2$

$$= \int dc_{12}\, dC\, c_{12}^n e^{-\alpha 2 C^2} e^{-\alpha c_{12}^2/2}$$
$$= \int dc_{12}\, e^{-\alpha/2\, c_{12}^2} c_{12}^n \int dC\, e^{-2\alpha C^2}$$
$$= \frac{\pi^{d/2}}{\beta^{\frac{d+n}{2}}} \frac{\Gamma(\frac{d+n}{2})}{\Gamma(d/2)} ; \beta = \frac{\alpha}{2} \quad = \frac{\pi^{d/2}}{\beta^{d/2}} \frac{\Gamma(d/2)}{\Gamma(d/2)} , \beta = 2\alpha$$
$$= \frac{\pi^d 2^{n/2}}{\alpha^{d+n/2}} \Gamma\left(\frac{d+n}{2}\right)/\Gamma(d/2)$$

Dans notre cas $n=1$, donc :

$$\int dv_1 \int dv_2\, |v_{12}|\, e^{-\alpha v_1^2} e^{-\alpha v_2^2} = \frac{\pi^d 2^{1/2}}{\alpha^{d+1/2}} \Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)/\Gamma(d/2) \overset{\alpha = 1/T}{=} Cte \cdot T^{d+1/2}$$

$$\Rightarrow \omega_a[f^{(0)}, f^{(0)}] = Cte \cdot n^2/T^d \cdot T^{d+1/2} = Cte \cdot n^2 T^{1/2}$$

$$\Rightarrow \nabla_r\left(\frac{1}{n}\omega_a[f^{(0)},f^{(0)}]\right) = \nabla_r\left(Cte \cdot \frac{1}{n} n^2 T^{1/2}\right) = Cte \cdot \nabla_r(n T^{1/2}) = cte\left[(\nabla_r n) T^{1/2} + n \nabla_r(T^{1/2})\right] = cte\left[\frac{\nabla_r n}{n} n T^{1/2} + n T^{1/2} \frac{\nabla_r T^{1/2}}{T^{1/2}}\right]$$
$$= \nabla_r \ln(n) \cdot Cte\, n T^{1/2} + \nabla_r \ln(T^{1/2})\, cte\, n T^{1/2} \quad ; \; Cte \cdot n T^{1/2} = \frac{1}{n} Cte\, n^2 T^{1/2} = \frac{1}{n}\omega_a[f^{(0)},f^{(0)}]$$
$$= \boxed{\frac{1}{n}\omega_a[f^{(0)},f^{(0)}]\left(\nabla_r \ln(n) + \frac{1}{2}\nabla_r \ln(T)\right)}$$ analyse dimensionnelle : $\frac{1}{n}\omega[f^{(0)},f^{(0)}] \sim n T^{1/2}$ (5)

Calcul de $\nabla_r \xi^{(0)}$:

$$\xi_a^{(0)} = -\frac{m}{3nkT}\omega_a[f^{(0)}, v_1^2 f^{(0)}] = -\frac{m}{6nkT}\sigma^{d-1}\beta_1 \int dv_1 \int dv_2\, |v_{12}|\, f^{(0)}(r,v_1,t) f^{(0)}(r,v_2,t)\, v_1^2$$
$$= Cte \cdot \frac{1}{nT}\int dv_1 dv_2\, n/T^{d/2}\, n/T^{d/2}\, e^{-1/T(v_1-u)^2} e^{-1/T(v_2-u)^2} |v_{12}|\, v_1^2$$
$$= Cte \cdot \frac{n}{T^{d+1}} \int dv_1 dv_2\, e^{-(v_1-u)^2/T} e^{-(v_2-u)^2/T} |v_{12}|\, v_1^2$$

Mais on remarque que les variables v_1 et v_2 sont indistinguables dans l'expression de $\xi^{(0)}$, d'où

$$\xi_a^{(0)} = cte \cdot \frac{n}{T^{d+1}} \int dv_1 dv_2\, e^{-(v_1-u)^2/T} e^{-(v_2-u)^2/T} |v_{12}| \frac{1}{2}(v_1^2+v_2^2)$$; $c_1 = v_1 - u$; $c_2 = v_2 - u$; $v_1^2+v_2^2 = c_1^2+c_2^2+2c_1 u + 2c_2 u$

$$= cte \cdot n/T^{d+1} \int dc_1 dc_2\, e^{-c_1^2/T} e^{-c_2^2/T} |c_{12}|\left[\frac{1}{2}(c_1^2+c_2^2) + c_1 u + c_2 u\right]$$; $c_1^2+c_2^2 = 2C^2 + 1/2\, c_{12}^2$; $c_1 = C + 1/2\, c_{12}$; $c_2 = C - 1/2\, c_{12}$

$$= cte \cdot n/T^{d+1} \int dc_{12} dC\, e^{-2C^2/T} e^{-c_{12}^2/2T}\, c_{12}\left[C^2 + \frac{1}{4}c_{12}^2 + C\cdot u + \frac{1}{2}c_{12}u + C\cdot u + 1/2\, c_{12}u\right]$$
$$= cte \cdot n/T^{d+1}\left[\langle c_{12} C^2\rangle + \frac{1}{4}\langle c_{12}^3\rangle + 2\sum_{i=1}^d u_i \langle c_{12} C_i\rangle\right] \quad ; \; \langle \cdot \rangle = \int dc_{12} \int dC\, e^{-2C^2/T} e^{-c_{12}^2/2T}$$

↳ contribution nulle pour raisons de symétrie.

Avec :

$$\langle c_{12}^3\rangle = \int dc_{12} \int dC\, e^{-2C^2/T} e^{-c_{12}^2/2T} c_{12}^3 = \int dc_{12}\, e^{-c_{12}^2/2T} c_{12}^3 \int dC\, e^{-2C^2/T}$$
$$= \frac{\pi^{d/2}}{\alpha^{\frac{d+3}{2}}} \frac{\Gamma(\frac{d+3}{2})}{\Gamma(d/2)} ; \alpha = \frac{1}{2T} \qquad = \frac{\pi^{d/2}}{\alpha^{d/2}} ; \alpha = \frac{2}{T}$$
$$= \frac{\pi^d}{\Gamma(d/2)} \frac{d+1}{2}\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right) 2^{\frac{d+3}{2}} 2^{-\frac{d}{2}} T^{\frac{d+3}{2}} T^{\frac{d}{2}}$$
$$= 2^{3/2} \frac{d+1}{2} \pi^d \frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})}{\Gamma(d/2)} T^{d+3/2} \quad (:= \gamma)$$

$$\langle c_{12} C^2\rangle = \int dc_{12}\, e^{-c_{12}^2/2T} c_{12} \int dC\, e^{-2C^2/T} C^2$$
$$= \frac{\pi^{d/2}}{\alpha^{\frac{d+1}{2}}} \frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})}{\Gamma(d/2)} , \alpha = \frac{1}{2T} \quad = \frac{\pi^{d/2}}{\alpha^{\frac{d+2}{2}}} \frac{\Gamma(\frac{d+2}{2})}{\Gamma(d/2)} , \alpha = 2/T$$
$$= \pi^d\, \Gamma\left(\tfrac{d+1}{2}\right)/\Gamma(d/2)\, \frac{d}{2}\, 2^{\frac{d+1}{2}} 2^{-\frac{d+2}{2}} T^{\frac{d+1}{2}} T^{\frac{d+2}{2}}$$
$$= 2^{-1/2} \frac{d}{2} \pi^d \frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})}{\Gamma(d/2)} T^{d+3/2} \quad (= \gamma)$$

Ainsi :

$$\xi_a^{(0)} = cte \cdot n/T^{d+1}\left[\frac{d}{\sqrt{2}}\gamma T^{d+3/2} + (d+1)\frac{2^{3/2}}{2^{4/2}}\gamma T^{d+3/2}\right]$$
$$= cte \cdot n/T^{d+1} \cdot T^{d+3/2} \cdot (d + (d+1))$$
$$= cte \cdot n \cdot T^{1/2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\nabla_r \xi_a^{(0)} = \nabla_r(cte \cdot n T^{1/2}) \overset{idem}{=} \xi_a^{(0)}\left[\nabla_r \ln(n) + \frac{1}{2}\nabla_r \ln(T)\right]}$$ **idem pour $\xi_c^{(0)}$** analyse dimensionnelle : $\xi^{(0)} \sim n T^{1/2}$ (6)

Insérant (5) et (6) dans (4 en $(1-p)\xi_c^{(0)}$) :

$$\partial_t^{(0)} f^{(1)} = -\mathcal{A}\left(p\, \xi_a^{(0)}\left[\nabla_r \ln(n) + \frac{1}{2}\nabla_r \ln(T)\right]\right) - \mathcal{B}\, p\, \frac{1}{n}\omega_a[f^{(0)},f^{(0)}]\left(\nabla_r \ln(n) + \frac{1}{2}\nabla_r \ln(T)\right)$$
$$- p\nabla_r \ln(T)\left[T\xi_a^{(0)}\frac{\partial}{\partial T} + \omega_a[f^{(0)},f^{(0)}]\frac{\partial}{\partial n}\right]\mathcal{A} - p\nabla_r \ln(n)\left[T\xi_a^{(0)}\frac{\partial}{\partial T} + \omega_a[f^{(0)},f^{(0)}]\frac{\partial}{\partial n}\right]\mathcal{B} - p\nabla_i u_j\left[T\xi_a^{(0)}\frac{\partial}{\partial T} + \omega_a[f^{(0)},f^{(0)}]\frac{\partial}{\partial n}\right]\mathcal{C}_{ij}$$

(en rouge, sous chaque crochet : $+\frac{1-p}{p}T\xi_c^{(0)}\partial_T$)

On voit que la seule différence de structure avec Brey est le $\omega[f^{(0)},f^{(0)}]$. Par contre, pour comparer mes équations avec celles de Brey il faut prendre $p=0$ et $\alpha = 1$ chez Brey. Le fait que la structure est la même montre le lien direct pour la généralisation à $\alpha < 1$: dans ce cas $\partial_t n$ reste inchangé, par contre $\partial_t v^2$ a un nouveau terme de perte de sorte que $\xi^{(0)} \rightarrow \frac{1-p}{p}\xi_a^{(0)} + \xi^{(0)}$, et donc $p\xi^{(0)} \rightarrow p\xi^{(0)} + (1-p)\xi_c^{(0)}$. On pourrait directement ainsi faire la substitution, et le résultat serait correct, avec $\xi_\alpha^{(0)} = (1-\alpha^2)\frac{2}{3nkT}\omega_b[f^{(0)},f^{(0)}]$; $\omega_b[f^{(0)},f^{(0)}] = \frac{m\pi\sigma^2}{16}\int dv_1 dv_2\, |v_1 - v_2|^3 f^{(0)}(r,v_1,t) f^{(0)}(r,v_2,t)$ (à revérifier, car cette dernière expression est établie en 3d !) Ceci donne :

$$\partial_t^{(0)} f^{(1)} = -\left\{\nabla_r \ln(n) + \frac{1}{2}\nabla_r \ln(T)\right\}\cdot\left\{\mathcal{A}\left(p\xi_a^{(0)} + (1-p)\xi_c^{(0)}\right) + \mathcal{B}\cdot p\,\frac{1}{n}\omega_a[f^{(0)},f^{(0)}]\right\}$$
$$- \nabla_r \ln(T)\left[p\, T\xi_a^{(0)}\frac{\partial}{\partial T} + (1-p)T\xi_c^{(0)}\frac{\partial}{\partial T} + p\omega_a[f^{(0)},f^{(0)}]\frac{\partial}{\partial n}\right]\mathcal{A}$$
$$- \nabla_r \ln(n)\left[p\, T\xi_a^{(0)}\frac{\partial}{\partial T} + (1-p)T\xi_c^{(0)}\frac{\partial}{\partial T} + p\omega_a[f^{(0)},f^{(0)}]\frac{\partial}{\partial n}\right]\mathcal{B}$$
$$- \nabla_i u_j\left[p\, T\xi_a^{(0)}\frac{\partial}{\partial T} + (1-p)T\xi_c^{(0)}\frac{\partial}{\partial T} + p\omega_a[f^{(0)},f^{(0)}]\frac{\partial}{\partial n}\right]\mathcal{C}_{ij}$$

où on rappelle que le terme en rouge représente les collisions inélastiques, les termes $\xi_a^{(0)}$ et ω_a l'annihilation avec $\xi_a^{(0)}$ la perte d'énergie et ω_a la diminution du nombre de particules. Comme $(\partial_t^{(0)} + L) f^{(1)}$ s'exprime en fonction des gradients, et qu'il en est de même du membre de droite, alors seuls les termes $p\left(\frac{2}{n}\omega_a^{(1)} - \xi_a^{(1)}T\partial_T f^{(0)}\right) - (1-p)\xi_c^{(1)}T\partial_T f^{(0)}$ ne s'expriment pas en termes de gradients. Ainsi, pour des raisons de symétrie la somme de ces termes doit être nulle car ces termes ne sont pas couplés linéairement aux vecteurs $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ ou au tenseur de trace nulle $\mathcal{C}_{ij}$. L'équation (***) devient donc :

$$-\left(\nabla_r \ln(n) + \frac{1}{2}\nabla_r \ln(T)\right)\cdot\left(\mathcal{A}\left(p\xi_a^{(0)} + (1-p)\xi_c^{(0)}\right) + \mathcal{B}\cdot p\cdot\frac{1}{n}\omega_a[f^{(0)},f^{(0)}]\right) - \nabla_r \ln(T)\left[p\, T\xi_a^{(0)}\frac{\partial}{\partial T} + (1-p)T\xi_c^{(0)}\frac{\partial}{\partial T} + p\omega_a[f^{(0)},f^{(0)}]\frac{\partial}{\partial n}\right]\mathcal{A}$$
$$- \nabla_r \ln(n)\left[p\, T\xi_a^{(0)}\frac{\partial}{\partial T} + (1-p)T\xi_c^{(0)}\frac{\partial}{\partial T} + p\omega_a[f^{(0)},f^{(0)}]\frac{\partial}{\partial n}\right]\mathcal{B} - \nabla_i u_j\left[p\, T\xi_a^{(0)}\frac{\partial}{\partial T} + (1-p)T\xi_c^{(0)}\frac{\partial}{\partial T} + p\omega_a[f^{(0)},f^{(0)}]\frac{\partial}{\partial n}\right]\mathcal{C}_{ij}$$
$$+ \nabla_r \ln(T)\, L\mathcal{A} + \nabla_r \ln(n)\, L\mathcal{B} + \nabla_i u_j\, L\mathcal{C}_{ij}$$
$$= A\,\nabla_r \ln(T) + B\,\nabla_r \ln(n) + C_{ij}\nabla_j u_i$$

On trouve les équations pour $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}_{ij}$ en égalant les coefficients des différents gradients :

$\nabla_r \ln(T)$: $-\frac{1}{2}\mathcal{A}\left(p\xi_a^{(0)} + (1-p)\xi_c^{(0)}\right) - \frac{1}{2}\mathcal{B}\, p\,\frac{1}{n}\omega_a[f^{(0)},f^{(0)}] - \left(p\, T\xi_a^{(0)}\frac{\partial}{\partial T} + (1-p)T\xi_c^{(0)}\frac{\partial}{\partial T} + p\omega_a[f^{(0)},f^{(0)}]\frac{\partial}{\partial n}\right)\mathcal{A} + L\mathcal{A} = A$

$\nabla_r \ln(n)$: $-\mathcal{A}\left(p\xi_a^{(0)} + (1-p)\xi_c^{(0)}\right) - \mathcal{B}\, p\,\frac{1}{n}\omega_a[f^{(0)},f^{(0)}] - \left(p\, T\xi_a^{(0)}\frac{\partial}{\partial T} + (1-p)T\xi_c^{(0)}\frac{\partial}{\partial T} + p\omega_a[f^{(0)},f^{(0)}]\frac{\partial}{\partial n}\right)\mathcal{B} + L\mathcal{B} = B$

$\nabla_i u_j$: $-\left(p\, T\xi_a^{(0)}\frac{\partial}{\partial T} + (1-p)T\xi_c^{(0)}\frac{\partial}{\partial T} + p\omega_a[f^{(0)},f^{(0)}]\frac{\partial}{\partial n}\right)\mathcal{C}_{ij} + L\mathcal{C}_{ij} = C_{ij}$

$$\Rightarrow \left\|\begin{array}{l}
\left(-\left(p\xi_a^{(0)} + (1-p)\xi_c^{(0)}\right)\left(\frac{1}{2} + T\frac{\partial}{\partial T}\right) - p\,\omega_a[f^{(0)},f^{(0)}]\frac{\partial}{\partial n} + L\right)\mathcal{A} - p\frac{1}{2n}\omega_a[f^{(0)},f^{(0)}]\mathcal{B} = A \\
\left(-\left(p\xi_a^{(0)} + (1-p)\xi_c^{(0)}\right)T\frac{\partial}{\partial T} - p\,\omega_a[f^{(0)},f^{(0)}]\left(\frac{1}{n} + \frac{\partial}{\partial n}\right) + L\right)\mathcal{B} - \left(p\xi_a^{(0)} + (1-p)\xi_c^{(0)}\right)\mathcal{A} = B \\
\left(-\left(p\xi_a^{(0)} + (1-p)\xi_c^{(0)}\right)T\frac{\partial}{\partial T} - p\,\omega_a[f^{(0)},f^{(0)}]\frac{\partial}{\partial n} + L\right)\mathcal{C}_{ij} = C_{ij} \\
A = \frac{1}{2}V\nabla_V(Vf^{(0)}) - (\beta m)^{-1}\nabla_r f^{(0)} \\
B = -Vf^{(0)} - (\beta m)^{-1}\nabla_r f^{(0)} \\
C_{ij} = \nabla_{V_i}(V_j f^{(0)}) - \frac{1}{d}\delta_{ij}\nabla_V(Vf^{(0)})
\end{array}\right.$$

Coeff. transport : $q^{(1)} = -\kappa\nabla_r T - \mu\nabla_r n$; κ : coeff. cond. thermique ; μ : cond. therm. inélastique ($\mu = 0$ si $\alpha = 1$)

$P_{ij}^{(1)} = -2\eta\left(\Lambda_{ij} - \frac{1}{d}\delta_{ij}\nabla_r u\right) - \zeta\delta_{ij}\nabla_r u$; $\Lambda_{ij} = \frac{1}{2}(\nabla_i u_j + \nabla_j u_i)$; η : viscosité de cisaillement ; ζ : viscosité volumique, Λ : tenseur contrainte

Equation (26) de Brey & Dufty et al. :

$$D_t^{(1)} f^{(0)} + V\nabla f^{(0)} = 0 \quad ; \quad V = v - u$$

$$\Rightarrow \partial_t^{(1)} f^{(0)} + u\nabla f^{(0)} + (v-u)\nabla f^{(0)} = \partial_t^{(1)} f^{(0)} + V\nabla_r f^{(0)} = 0$$

Avec:

$$\partial_t^{(1)} f^{(0)} = \frac{\partial f^{(0)}}{\partial T}\cdot\underbrace{\frac{\partial T}{\partial t}} + \frac{\partial f^{(0)}}{\partial n}\cdot\underbrace{\frac{\partial n}{\partial t}} + \nabla_u f^{(0)}\cdot\underbrace{\frac{\partial u}{\partial t}}$$

Avec:

$$\frac{\partial}{\partial t}T + u\nabla_r T = -\frac{2}{3}T\nabla_r u - \zeta^{(1)}T \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial t} = -u\nabla_r T - \frac{2}{3}T\nabla_r u - \zeta^{(1)}\cdot T$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + u\nabla_r n = -n\nabla_r u \Rightarrow \frac{\partial n}{\partial t} = -u\nabla_r n - n\nabla_r u$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u\nabla u_i = -\frac{1}{m\cdot n}\nabla_i p \Rightarrow \frac{\partial u_i}{\partial t} = -u\nabla u_i - \frac{1}{m\cdot n}\nabla_i p$$

Ainsi:

$$\partial_t^{(1)} f^{(0)} = \frac{\partial f^{(0)}}{\partial T}\left[-u\nabla_r T - \frac{2}{3}T\nabla_r u - \zeta^{(1)}T\right] + \frac{\partial f^{(0)}}{\partial n}\cdot\left[-u\nabla_r n - n\nabla_r u\right]$$
$$+ \nabla_{u_i} f^{(0)}\left[-u\nabla u_i - \frac{1}{m\cdot n}\nabla_i p\right]$$

Avec:

$$\nabla_r f^{(0)} = \frac{\partial f^{(0)}}{\partial T}\cdot\nabla_r T + \frac{\partial f^{(0)}}{\partial n}\cdot\nabla_r n + \frac{\partial f}{\partial u_i}\nabla_r u_i$$

Donc:

$$\partial_t^{(1)} f^{(0)} + V\nabla_r f^{(0)} = \frac{\partial f^{(0)}}{\partial T}\left[-\frac{2}{3}T\nabla_r u - \zeta^{(1)}T - u\nabla_r T + v\nabla_r T\right]$$
$$+ \frac{\partial f^{(0)}}{\partial n}\left[-u\nabla_r n - n\nabla_r u + v\nabla_r n\right]$$
$$+ \nabla_{u_i} f^{(0)}\left[-u\nabla u_i - \frac{1}{m\cdot n}\nabla_i p + v\nabla_r u_i\right]$$
$$= -\zeta^{(1)}T\partial_T f^{(0)} - \frac{\partial f^{(0)}}{\partial T}\left[\frac{2}{3}T\nabla_r u - V\nabla_r T\right] - \frac{\partial f^{(0)}}{\partial n}\left[n\nabla_r u - V\nabla_r n\right]$$
$$+ \nabla_{u_i} f^{(0)}\left[-\frac{1}{m\cdot n}\nabla_i p + V\nabla_r u_i\right]$$
$$= -\zeta^{(1)}T\partial_T f^{(0)} - \frac{\partial f^{(0)}}{\partial T}\left[\frac{2}{3}T\nabla_r u - V\nabla_r T\right] - \underbrace{\frac{\partial f^{(0)}}{\partial n}\cdot n}_{= f^{(0)} \text{ car } f^{(0)} \sim n}\left[\nabla_r u - V\nabla_r \ln(n)\right]$$
$$+ \nabla_{u_i} f^{(0)}\left[-\frac{1}{m\cdot n}\nabla_i p + V\nabla_r u_i\right]$$

$$\Rightarrow (\partial_t^{(0)} + L)f^{(1)} + (D_t^{(1)} + V\nabla)f^{(0)} = (\partial_t^{(0)} + L)f^{(1)} - \zeta^{(1)}T\partial_T f^{(0)} - \frac{\partial f^{(0)}}{\partial T}\left[\frac{2}{3}T\nabla_r u - V\nabla_r T\right]$$
$$- f^{(0)}\left[\nabla_r u - V\nabla_r \ln(n)\right] - \nabla_{u_i} f^{(0)}\left[\frac{1}{mn}\nabla_i p - V\nabla_r u_i\right] = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{(\partial_t^{(0)} + L)f^{(1)} - \zeta^{(1)}T\partial_T f^{(0)} = f^{(0)}\left[\nabla_r u - V\nabla_r \ln(n)\right] + \partial_T f^{(0)}\left[\frac{2}{3}T\nabla_r u - V\nabla_r T\right] + \nabla_{u_i} f^{(0)}\left[\frac{1}{mn}\nabla_i p - V\cdot\nabla_r u_i\right]}$$

#

● Si on ne peut pas totalement simplifier $\Omega f^{(1)}$, et qu'il reste les termes $\omega[f^{(0)}, \nabla f^{(1)}]$ ou d'autres, alors on repart de ma calcul des coeff. de viscosité :

mais alors, a-t-on le droit de dire que $\alpha_i, \beta_i, \gamma_{ij}$ héritent des mêmes propriétés de symétrie que A, B, C_{ij}?

$$\underbrace{-p\Omega\alpha_i}_{\text{nouveau}} - p\, Z_{ij} + J\gamma_{ij} = C_{ij}$$

; intègre sur $-\frac{1}{(d-1)(d+2)}\int dv\, D_{ij}(v) \Rightarrow$

suite

$$\Rightarrow -\frac{1}{(\dots)}\int dv\, D_{ij}(v)\left[-pT\xi_T^{(0)}\partial_T\gamma_{ij} - pn\,\xi_n^{(0)}\partial_n\gamma_{ij}\right] - \frac{1}{(\dots)}\int dv\, D_{ij}(v)\left[-p\Omega\alpha_i\right] - \frac{1}{(\dots)}\int dv\, D_{ij}(v)\, J\gamma_{ij}$$

$$= -\frac{1}{(\dots)}\int dv\, D_{ij}(v) C_{ij}(v)$$

$$\Rightarrow -pT\xi_T^{(0)}\partial_T\eta - pn\,\xi_n^{(0)}\partial_n\eta - p\frac{1}{(\dots)}\int dv\, D_{ij}(v)\,\Omega\alpha_i - \frac{1}{(\dots)}\underbrace{\frac{\int dv\, D_{ij}(v)\, J\gamma_{ij}}{\int dv\, D_{ij}(v)\,\gamma_{ij}}}_{:=\nu_\eta}\int dv\, D_{ij}(v)\,\gamma_{ij} = -\frac{1}{(\dots)}\int dv\, D_{ij}(v) C_{ij}(v)$$

$$\Rightarrow \left[-pT\xi_T^{(0)}\partial_T - pn\,\xi_n^{(0)}\partial_n + \nu_\eta\right]\eta - p\frac{1}{(\dots)}\underbrace{\frac{\int dv\, D_{ij}(v)\,\Omega\alpha_i}{\int dv\, D_{ij}(v)\,\gamma_{ij}}}_{:=\Omega_\eta}\int dv\, D_{ij}(v)\gamma_{ij} = -\frac{1}{(\dots)}\int dv\, D_{ij}(v) C_{ij}(v)$$

$$\Rightarrow \left[-pT\xi_T^{(0)}\partial_T - pn\,\xi_n^{(0)}\partial_n + \nu_\eta + \Omega_\eta\right]\eta = -\frac{1}{(\dots)}\int dv\, D_{ij}(v) C_{ij}(v)$$

Analyse dim. $\Rightarrow \nu_\eta \sim n^0 \Rightarrow$; $\eta \sim T^{1/2} \Rightarrow T\partial_T\eta = 1/2\,\eta$

$$\boxed{\left[-p\frac{\xi_T^{(0)}}{2} + \nu_\eta + \Omega_\eta\right]\eta = -\frac{1}{(\dots)}\int dv\, D_{ij}(v) C_{ij}(v)}$$

$$\Rightarrow \eta = -\frac{1}{-p\xi_T^{(0)}/2 + \nu_\eta + \Omega_\eta}\frac{1}{(\dots)}\int dv\, \underbrace{D_{ij}(v)}_{=\text{pair}}\, C_{ij}(v)$$

$$C_{ij}(v) = \frac{\partial}{\partial v_i}(v_j f^{(0)}) + \text{impaire} \to 0$$

$$\boxed{\eta = -\frac{p^{(0)}}{\nu_\eta + \Omega_\eta - p\frac{\xi_T^{(0)}}{2}}}$$

Etude de Ω_η :

$$\Omega_\eta = \frac{\int dv\, D_{ij}(v)\,\Omega\alpha_i}{\underbrace{\int dv\, D_{ij}(v)\,\gamma_{ij}}_{:=\Gamma}} = \frac{1}{\Gamma}\int dv\, D_{ij}(v)\left[\frac{\partial f^{(0)}}{\partial v_k}\frac{1}{n}\,\omega[f^{(0)}, v_k\,\alpha_i] + \dots\right]$$

Conditions de solubilité

Bies : preuve de la nullité de $\xi^{(1)}$

Marche dans le cas de $\xi^{(1)}$, mais pas dans mon cas avec le Ω : les termes en $\frac{\partial f^{(1)}}{\partial v_i}$ ne tombent pas

1

Par construction de la méthode de Chapman-Enskog, les moments de v^0, v^1, v^2 sur f sont donnés par ceux de l'ordre le plus bas $f^{(0)}$. Par conséquent les moments

$$\langle \chi | f^{(k)} \rangle = \int dv\, \chi(v)\, f^{(k)} = 0 \quad \forall k \geq 1,\ \chi(v) = \{v^0, v^1, v^2\}. \qquad (*)$$

Soit $\mathcal{P}$ l'opérateur de projection dans le sous-espace $\mathcal{L}$ engendré par $\{v^0, v^1, v^2\}$ donné par [8]

$$\mathcal{P} g(v) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{d+2} \psi_i(v) f^{(0)}(v) \int dv'\, \psi_i(v') g(v'),$$

où

$$\{\psi_i(v)\} = \{1, c_1 v, c_2 v^2\},$$

avec c_1 et c_2 définis dans [8].

alors $(*)$ signifie que

$$\mathcal{P} f = \mathcal{P} f^{(0)}.$$

En particulier

$$f^{(1)} \in \mathcal{L}^{\perp}.$$

Par conséquent $f^{(1)}$ est dans le sous-espace orthogonal à $\mathcal{L}$. Ainsi

$$\mathcal{P} f^{(1)} = \mathcal{P}\left(\mathcal{A}_i \nabla_i \ln(T) + \mathcal{B}_i \nabla_i \ln(n) + \mathcal{Z}_{ij} \nabla_i u_j \right) = 0$$

$$\Longrightarrow \mathcal{P} \begin{pmatrix} \mathcal{A} \\ \mathcal{B} \\ \mathcal{Z} \end{pmatrix} = 0 \qquad (**)$$

La condition $(**)$ découle donc directement de la définition de la méthode de Chapman-Enskog et de sa conséquence $(*)$. On peut montrer que la condition d'existence des $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{Z}$ non nuls est que

$$\mathcal{P} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = 0,$$

ce qui se vérifie par calcul direct (condition de solubilité, [8]).

L'équation (A1) est

$$(\partial_t^{(0)} + L) f^{(1)} - \xi^{(1)} T \partial_T f^{(0)} = A \nabla \ln(T) + B \nabla \ln(n) + C_{ij} \nabla_j u_i, \qquad (5)$$

avec

$$\xi^{(1)} = (1-\alpha^2) \frac{4}{3nkT}\, \omega[f^{(0)}, f^{(1)}]$$

$$\omega[f^{(0)}, f^{(1)}] = \frac{m\pi\sigma^2}{16} \int dv_1 \int dv_2\, |v_1 - v_2|^3 f^{(0)}(r, v_1, t) f^{(1)}(r, v_2, t),$$

$$f^{(1)} = \mathcal{A}_i \nabla_i \ln(T) + \mathcal{B}_i \nabla_i \ln(n) + \mathcal{Z}_{ij} \nabla_i u_j$$

$\in \mathcal{L}^{\perp}$ car $\mathcal{P}(\partial_t^{(0)} + L) = (\partial_t^{(0)} + L)\mathcal{P}$: commute

$\in \mathcal{L}^{\perp}$

si on montre que tout ça est dans $\mathcal{L}$, alors ceci est nul. Donc on écrit la condition pour que ceci soit dans $\mathcal{L}^{\perp}$, et impose que ce qui est dans $\mathcal{L}^{\perp}$ est nul.

On a donc

$$\xi^{(1)} = V_{Ai}\, \nabla_i \ln(T) + V_{Bi}\, \nabla_i \ln(n) + M_{ij}\, \nabla_i U_j \, .$$

~~Avec~~

avec

$$V_{Ai} \sim \int dv_1 dv_2\, |v_1 - v_2|^3\, f^{(0)}(r, v_1, t)\, \mathcal{A}_i(v_2)$$

$$V_{Bi} \sim \int dv_1 dv_2\, |v_1 - v_2|^3\, f^{(0)}(r, v_1, t)\, \mathcal{B}_i(v_2)$$

$$M_{ij} \sim \int dv_1 dv_2\, |v_1 - v_2|^3\, f^{(0)}(r, v_1, t)\, \mathcal{C}_{ij}(v_2)$$ ~~$Tr(M) = 0$~~

$\mathcal{L}$, $\partial_t^{(0)}$ et $\mathcal{P}$ commutent

De plus, ~~comme~~ pour que l'équation (5) puisse être satisfaite il faut que

~~$V_{Ai} \in \mathcal{P}^\perp \Rightarrow \mathcal{P} V_{Ai} = 0$~~

~~$V_{Bi} \in \mathcal{P}^\perp \Rightarrow \mathcal{P} V_{Bi} = 0$~~

~~$M_{ij} \in \mathcal{P}^\perp \Rightarrow \mathcal{P} M_{ij} = 0$~~

$V_{Ai}\, T \partial_T f^{(0)} \in \mathcal{P}^\perp$ $\Rightarrow \mathcal{P}(V_{Ai}\, T\partial_T f^{(0)}) = 0$

$\Rightarrow V_{Ai}\, \mathcal{P}(T\partial_T f^{(0)}) = 0$

$\Rightarrow V_{Ai}\, T\partial_T \underbrace{\mathcal{P}(f^{(0)})}_{= f^{(0)}} = 0$

$\Rightarrow V_{Ai} = 0$

~~Mais comme V_{Ai} est un scalaire, alors $\mathcal{P} V_{Ai} = 0 \Rightarrow V_{Ai} = 0$. De même pour V_{Bi}.~~

~~Mais comme V_{Ai} est une quantité indépendante des vit un scalaire indépendant des vitesses, pour que $\mathcal{P} V_{Ai}$ il faut. alors~~

~~$\mathcal{P} V_{Ai} = 0 \Rightarrow V_{Ai} = 0$~~

~~De même pour V_{Bi}.~~

idem : $V_{Bi} \Rightarrow \ldots \Rightarrow V_{Bi} = 0$

$$M_{ij}\, T\partial_T \underbrace{\mathcal{P}(f^{(0)})}_{= f^{(0)}} = 0 \qquad \forall ij$$

$\Rightarrow M_{ij} = 0$

$\Rightarrow$ $\boxed{M = 0}$

4.1. Equations hydrodynamiques

Il faut calculer explicitement les taux de déclin à l'ordre un. Or comme $\Omega f^{(1)} = f^{(0)}\xi_n^{(1)} - \frac{\partial f^{(0)}}{\partial V_i}\xi_{u_i}^{(1)} + \frac{\partial f^{(0)}}{\partial T}T\xi_T^{(1)} = 0$, il suffit de calculer uniquement deux des trois taux de déclin. ⊛

4.1.1. Taux de déclin de densité $\xi_n^{(1)}$

$$\xi_n^{(1)} = \frac{2}{n}\omega\left[f^{(0)}, f^{(1)}\right]$$

$$= \frac{2}{n}\sigma^{d-1}\beta_1\int_{\mathbb{R}^{2d}} dV_1 dV_2\, |V_{12}|\left(-\frac{\beta^3}{n}\mathcal{M}(V_1)\right)\left[\frac{2m}{d+2}S_i(V_1)\left(\kappa\nabla_i T + \mu\nabla_i n\right) + \frac{\eta}{\beta}D_{ij}(V_1)\nabla_j u_i\right]\mathcal{M}(V_2)\times$$
$$\times\left[1 + a_2 S_2(c_2^2)\right]$$

$$= -\frac{2}{n}\sigma^{d-1}\beta_1\frac{\beta^3}{n}\frac{n^2}{V_T^{2d}}\frac{1}{\pi^d}\int_{\mathbb{R}^{2d}} dV_1 dV_2\,|V_{12}|\, e^{-V_1^2/V_T^2}e^{-V_2^2/V_T^2}\left[1 + a_2 S_2(V_2^2/V_T^2)\right]\left[\frac{2m}{d+2}S_i(V_1)\left(\kappa\nabla_i T + \mu\nabla_i n\right)\right.$$
$$\left. + \frac{\eta}{\beta}D_{ij}(V_1)\nabla_j u_i\right]$$

$$= -2\beta_1\frac{\sigma^{d-1}\beta^3}{\pi^d}\int_{\mathbb{R}^{2d}} dc_1 dc_2\, V_T|c_{12}|\, e^{-c_1^2}e^{-c_2^2}\left[1 + a_2 S_2(c_2^2)\right]\left[\frac{2m}{d+2}S_i(V_T c_1)\left(\kappa\nabla_i T + \mu\nabla_i n\right) + \frac{\eta}{\beta}D_{ij}(V_T c_1)\nabla_j u_i\right]$$

$$= -2\beta_1\frac{\sigma^{d-1}\beta^3}{\pi^d}V_T\frac{2m}{d+2}\left(\kappa\nabla_i T + \mu\nabla_i n\right)\int_{\mathbb{R}^{2d}} dc_1 dc_2\, |c_{12}|\, e^{-c_1^2}e^{-c_2^2}\left[1 + a_2 S_2(c_2^2)\right]\left(\frac{m}{2}V_T^2 c_1^2 - \frac{d+2}{2}k_B T\right)V_T c_{1i}$$

$\hookrightarrow = \frac{1}{\beta} = \frac{m}{2}\frac{2}{\beta m} = \frac{m}{2}V_T^2$

$$-2\beta_1\frac{\sigma^{d-1}\beta^3}{\pi^d}V_T\frac{\eta}{\beta}\nabla_j u_i\int_{\mathbb{R}^{2d}} dc_1 dc_2\, |c_{12}|\, e^{-c_1^2}e^{-c_2^2}\left[1 + a_2 S_2(c_2^2)\right]m\left(V_T^2 c_{1i}c_{1j} - \frac{1}{d}V_T^2 c_1^2\delta_{ij}\right) \qquad (1)$$

Passage dans les coordonnées relatives et du centre de masse :

$$\left.\begin{aligned}\underline{c}_{12} &= \underline{c}_1 - \underline{c}_2\\ \underline{c} &= \frac{1}{2}(\underline{c}_1 + \underline{c}_2)\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned}\underline{c}_1 &= \underline{c} + \frac{1}{2}\underline{c}_{12}\\ \underline{c}_2 &= \underline{c} - \frac{1}{2}\underline{c}_{12}\end{aligned}\right.$$

Ainsi :

$$c_1^2 + c_2^2 = 2c^2 + \frac{1}{2}c_{12}^2$$
$$c_1^2 = c^2 + \frac{1}{4}c_{12}^2 + (c\cdot c_{12})$$
$$S_2(c_2^2) = \frac{1}{2}c_2^4 - \frac{d+2}{2}c_2^2 + \frac{d(d+2)}{4}$$
$$= \frac{1}{2}\left(c^2 + \frac{1}{4}c_{12}^2 - (c\cdot c_{12})\right)^2 - \frac{d+2}{2}\left(c^2 + \frac{1}{4}c_{12}^2 - (c\cdot c_{12})\right) + \frac{d(d+2)}{4}$$
$$= \frac{1}{2}\left[c^4 + \frac{1}{16}c_{12}^4 + 2\,\frac{1}{4}c^2c_{12}^2 + (c\cdot c_{12})^2 - 2(c\cdot c_{12})\left(c^2 + \frac{1}{4}c_{12}^2\right)\right]$$
$$-\frac{d+2}{2}\left(c^2 + \frac{1}{4}c_{12}^2\right) + \frac{d+2}{2}(c\cdot c_{12}) + \frac{d(d+2)}{4}$$
$$= \frac{1}{2}c^4 + \frac{1}{32}c_{12}^4 + \frac{1}{4}c^2c_{12}^2 + \frac{1}{2}(c\cdot c_{12})^2 - (c\cdot c_{12})\left(c^2 + \frac{1}{4}c_{12}^2 - \frac{d+2}{2}\right) - \frac{d+2}{2}c^2 - \frac{d+2}{8}c_{12}^2$$
$$+\frac{d(d+2)}{4}$$
$$= \frac{1}{2}c^4 + \frac{1}{32}c_{12}^4 + \frac{1}{4}c^2c_{12}^2 - \frac{d+2}{2}c^2 - \frac{d+2}{8}c_{12}^2 + \frac{1}{2}(c\cdot c_{12})^2 - c^2(c\cdot c_{12}) - \frac{1}{4}c_{12}^2(c\cdot c_{12}) + \frac{d+2}{2}(c\cdot c_{12})$$
$$+\frac{d(d+2)}{4}$$

Ainsi :

$$\xi_n^{(1)} = -2\beta_1\frac{\sigma^{d-1}\beta^3}{\pi^d}V_T\frac{2m}{d+2}\frac{m}{2}V_T^3\left(\kappa\nabla_i T + \mu\nabla_i n\right)\underbrace{\int_{\mathbb{R}^{2d}} dc_1 dc_2\,|c_{12}|\,e^{-c_1^2}e^{-c_2^2}\left[1 + a_2 S_2(c_2^2)\right]\left[c_1^2 - \frac{d+2}{2}\right]c_{1i}}_{:= I_1}$$
$$-2\beta_1\frac{\sigma^{d-1}\beta^3}{\pi^d}V_T\frac{\eta}{\beta}mV_T^2\nabla_j u_i\underbrace{\int_{\mathbb{R}^{2d}} dc_1 dc_2\,|c_{12}|\,e^{-c_1^2}e^{-c_2^2}\left[1 + a_2 S_2(c_2^2)\right]\left[c_{1i}c_{1j} - \frac{1}{d}c_1^2\delta_{ij}\right]}_{:= I_2} \qquad (2)$$

$$I_1 = \int_{\mathbb{R}^d} dc_{12}\,|c_{12}|\,e^{-\frac{1}{2}c_{12}^2}\int_{\mathbb{R}^d} dc\, e^{-2c^2}\left(c^2 + \frac{1}{4}c_{12}^2 + (c\cdot c_{12}) - \frac{d+2}{2}\right)\left(c_i + \frac{1}{2}c_{12i}\right)\left[1 + a_2 S_2(c_2^2)\right]$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} dc_{12}\,|c_{12}|\,e^{-\frac{1}{2}c_{12}^2}\int_{\mathbb{R}^d} dc\, e^{-2c^2}\left[c^2c_i + \frac{1}{4}c_{12}^2c_i + (c\cdot c_{12})c_i + \frac{1}{2}c^2c_{12i} + \frac{1}{8}c_{12}^2c_{12i} + \frac{1}{2}(c\cdot c_{12})c_{12i}\right.$$
$$\left. - \frac{d+2}{2}c_i - \frac{d+2}{4}c_{12i}\right]\left[1 + a_2 S_2(c_2^2)\right]$$

Remarquons que le petit raisonnement suivant ne permet pas de dire directement que $\xi_{ui}^{(1)} = 0$. ⊛

Par le biais des coefficients de transport $\mathcal{K}, \mu$, et η, la distribution $f^{(1)}$ dépend des taux de déclin à l'ordre zéro. Mais comme $\xi_{ui}^{(0)} = 0$, alors $f^{(1)} = f^{(1)}(\xi_n^{(0)}, \xi_T^{(0)})$. En particulier, $f^{(1)}$ ne dépend pas de $\xi_{ui}^{(1)}$ ni d'un quelconque autre ordre du développement de ξ_{ui}. D'autre part, la distribution $f^{(0)}$ ne dépend pas de ξ_{ui} ni d'un quelconque autre taux de déclin (ici est l'erreur). Ainsi

$$\Omega f^{(1)} = f^{(0)} \xi_n^{(1)} - \frac{\partial f^{(0)}}{\partial v_i} \xi_{ui}^{(1)} + \frac{\partial f^{(0)}}{\partial T} T \xi_T^{(1)} \qquad (*)$$

est indépendant de $\xi_{ui}^{(1)}$. Or comme le seul terme dans $(*)$ qui dépende de $\xi_{ui}^{(1)}$ est $\xi_{ui}^{(1)}$ lui-même, la seule possibilité est que $\xi_{ui}^{(1)} = 0$.

L'erreur dans ce raisonnement est la suivante : $f^{(0)}$ dépend implicitement de $\xi_{ui}^{(1)}$ par le biais de la vitesse thermique $v_T = \sqrt{2/\beta m}$, où $\beta = (k_B T)^{-1}$. En effet, dans cette dernière équation la température est solution du système d'équations (436), faisant intervenir $\xi_{ui}^{(1)}$.

②

$$= \int_{\mathbb{R}^d} dc_{12}\, |c_{12}|\, e^{-\frac{1}{2}c_{12}^2} \int_{\mathbb{R}^d} dc\, e^{-2c^2} \Big(c^2 c_i + \tfrac{1}{4} c_{12}^2 c_i + (c\cdot c_{12}) c_i + \tfrac{1}{2} c^2 c_{12i} + \tfrac{1}{8} c_{12}^2 c_{12i} + \tfrac{1}{2}(c\cdot c_{12}) c_{12i} - \tfrac{d+2}{2} c_i - \tfrac{d+2}{4} c_{12i} \Big)$$

$$+ a_2 \int_{\mathbb{R}^d} dc_{12}\, |c_{12}|\, e^{-\frac{1}{2}c_{12}^2} \int_{\mathbb{R}^d} dc\, e^{-2c^2} \Big(c^2 c_i + \tfrac{1}{4} c_{12}^2 c_i + (c\cdot c_{12}) c_i + \tfrac{1}{2} c^2 c_{12i} + \tfrac{1}{8} c_{12}^2 c_{12i} + \tfrac{1}{2}(c\cdot c_{12}) c_{12i} - \tfrac{d+2}{2} c_i - \tfrac{d+2}{4} c_{12i} \Big) \times$$
$$\times \Big(\tfrac{1}{2}c^4 + \tfrac{1}{32} c_{12}^4 + \tfrac{1}{4} c^2 c_{12}^2 - \tfrac{d+2}{2} c^2 - \tfrac{d+2}{8} c_{12}^2 + \tfrac{1}{2}(c\cdot c_{12})^2 - c^2 (c\cdot c_{12}) - \tfrac{1}{4} c_{12}^2 (c\cdot c_{12}) + \tfrac{d+2}{2}(c\cdot c_{12}) + \tfrac{d(d+2)}{4} \Big) \quad (3)$$

Pour des raisons de symétrie, on voit que les termes suivants sont nuls :

$$\int_{\mathbb{R}^d} dc_{12}\, |c_{12}|^n e^{-\frac{1}{2}c_{12}^2} \int_{\mathbb{R}^d} dc\, c^m e^{-2c^2}\, F(c, c_{12}) = 0 \quad (4)$$

$$F(c, c_{12}) = \Big\{ c_i, c_{12i}, c_i c_{12j}, (c\cdot c_{12})^{2p+1}, c_i (c\cdot c_{12})^p, c_{12i}(c\cdot c_{12})^p, c_i c_j (c\cdot c_{12})^{2p+1}, c_{12i} c_{12j} (c\cdot c_{12})^{2p+1}, c_i c_{12j} (c\cdot c_{12})^{2p} \Big\}, \quad (5)$$

où $p \in \mathbb{N}$. Ainsi :

$$I_1 = a_2 \int_{\mathbb{R}^d} dc_{12}\, |c_{12}|\, e^{-\frac{1}{2}c_{12}^2} \int_{\mathbb{R}^d} dc\, e^{-2c^2} \Big[c^2 c_i \tfrac{1}{2} c^4 + c^2 c_i \tfrac{1}{32} c_{12}^4 + c^2 c_i \tfrac{1}{4} c^2 c_{12}^2 + c^2 c_i \big(-\tfrac{d+2}{2}\big) c^2 + c^2 c_i \big(-\tfrac{d+2}{8}\big) c_{12}^2$$
$$+ c^2 c_i \tfrac{1}{2}(c\cdot c_{12})^2 - c^2 c_i c^2 (c\cdot c_{12}) - c^2 c_i \tfrac{1}{4} c_{12}^2 (c\cdot c_{12}) + c^2 c_i \tfrac{d+2}{2}(c\cdot c_{12})$$
$$+ c^2 c_i \tfrac{d(d+2)}{4} + \tfrac{1}{4} c_{12}^2 c_i \tfrac{1}{2} c^4 + \tfrac{1}{4} c_{12}^2 c_i \tfrac{1}{32} c_{12}^4 + \tfrac{1}{4} c_{12}^2 c_i \tfrac{1}{4} c^2 c_{12}^2$$
$$- \tfrac{1}{4} c_{12}^2 c_i \tfrac{d+2}{2} c^2 - \tfrac{1}{4} c_{12}^2 c_i \tfrac{d+2}{8} c_{12}^2 + \tfrac{1}{4} c_{12}^2 c_i \tfrac{1}{2}(c\cdot c_{12})^2 - \tfrac{1}{4} c_{12}^2 c_i c^2 (c\cdot c_{12})$$
$$- \tfrac{1}{4} c_{12}^2 c_i \tfrac{1}{4} c_{12}^2 (c\cdot c_{12}) + \tfrac{1}{4} c_{12}^2 c_i \tfrac{d+2}{2}(c\cdot c_{12}) + \tfrac{1}{4} c_{12}^2 c_i \tfrac{d(d+2)}{4} + (c\cdot c_{12}) c_i \tfrac{1}{2} c^4$$
$$+ (c\cdot c_{12}) c_i \tfrac{1}{32} c_{12}^4 + (c\cdot c_{12}) c_i \tfrac{1}{4} c^2 c_{12}^2 + (c\cdot c_{12}) c_i \big(-\tfrac{d+2}{2}\big) c^2 - (c\cdot c_{12}) c_i \tfrac{d+2}{8} c_{12}^2$$
$$+ (c\cdot c_{12}) c_i \tfrac{1}{2}(c\cdot c_{12})^2 - (c\cdot c_{12}) c_i c^2 (c\cdot c_{12}) - (c\cdot c_{12}) c_i \tfrac{1}{4} c_{12}^2 (c\cdot c_{12})$$
$$+ (c\cdot c_{12}) c_i \tfrac{d+2}{2}(c\cdot c_{12}) + (c\cdot c_{12}) c_i \tfrac{d(d+2)}{4} + \tfrac{1}{2} c^2 c_{12i} \tfrac{1}{2} c^4 + \tfrac{1}{2} c^2 c_{12i} \tfrac{1}{32} c_{12}^4$$
$$+ \tfrac{1}{2} c^2 c_{12i} \tfrac{1}{4} c^2 c_{12}^2 - \tfrac{1}{2} c^2 c_{12i} \tfrac{d+2}{2} c^2 - \tfrac{1}{2} c^2 c_{12i} \tfrac{d+2}{8} c_{12}^2 + \tfrac{1}{2} c^2 c_{12i} \tfrac{1}{2}(c\cdot c_{12})^2$$
$$- \tfrac{1}{2} c^2 c_{12i} c^2 (c\cdot c_{12}) - \tfrac{1}{2} c^2 c_{12i} \tfrac{1}{4} c_{12}^2 (c\cdot c_{12}) + \tfrac{1}{2} c^2 c_{12i} \tfrac{d+2}{2}(c\cdot c_{12}) + \tfrac{1}{2} c^2 c_{12i} \tfrac{d(d+2)}{4}$$
$$+ \tfrac{1}{8} c_{12}^2 c_{12i} \tfrac{1}{2} c^4 + \tfrac{1}{8} c_{12}^2 c_{12i} \tfrac{1}{32} c_{12}^4 + \tfrac{1}{8} c_{12}^2 c_{12i} \tfrac{1}{4} c^2 c_{12}^2 - \tfrac{1}{8} c_{12}^2 c_{12i} \tfrac{d+2}{2} c^2$$
$$- \tfrac{1}{8} c_{12}^2 c_{12i} \tfrac{d+2}{8} c_{12}^2 + \tfrac{1}{8} c_{12}^2 c_{12i} \tfrac{1}{2}(c\cdot c_{12})^2 - \tfrac{1}{8} c_{12}^2 c_{12i} c^2 (c\cdot c_{12})$$
$$- \tfrac{1}{8} c_{12}^2 c_{12i} \tfrac{1}{4} c_{12}^2 (c\cdot c_{12}) + \tfrac{1}{8} c_{12}^2 c_{12i} \tfrac{d+2}{2}(c\cdot c_{12}) + \tfrac{1}{8} c_{12}^2 c_{12i} \tfrac{d(d+2)}{4}$$
$$+ \tfrac{1}{2}(c\cdot c_{12}) c_{12i} \tfrac{1}{2} c^4 + \tfrac{1}{2}(c\cdot c_{12}) c_{12i} \tfrac{1}{32} c_{12}^4 + \tfrac{1}{2}(c\cdot c_{12}) c_{12i} \tfrac{1}{4} c^2 c_{12}^2$$
$$- \tfrac{1}{2}(c\cdot c_{12}) c_{12i} \tfrac{d+2}{2} c^2 - \tfrac{1}{2}(c\cdot c_{12}) c_{12i} \tfrac{d+2}{8} c_{12}^2 + \tfrac{1}{2}(c\cdot c_{12}) c_{12i} \tfrac{1}{2}(c\cdot c_{12})^2$$
$$+ \tfrac{1}{2}(c\cdot c_{12}) c_{12i} (-c^2)(c\cdot c_{12}) - \tfrac{1}{2}(c\cdot c_{12}) c_{12i} \tfrac{1}{4} c_{12}^2 (c\cdot c_{12}) + \tfrac{1}{2}(c\cdot c_{12}) c_{12i} \tfrac{d+2}{2}(c\cdot c_{12})$$
$$+ \tfrac{1}{2}(c\cdot c_{12}) c_{12i} \tfrac{d(d+2)}{4} \Big] + \Big(-\tfrac{d+2}{2} c_i - \tfrac{d+2}{4} c_{12i} \Big) S_2(c_{12}^2)$$
$$= 0 \quad (6)$$

En effet, on voit tout de suite de (3) que I_1 est nul, car il y aura toujours un terme en c_i ou c_{12i} à intégrer, d'où selon (4) une contribution nulle. On a :

$$I_2 = \int_{\mathbb{R}^d} dc_{12}\, |c_{12}|\, e^{-\frac{1}{2}c_{12}^2} \int_{\mathbb{R}^d} dc\, e^{-2c^2} \Big[\big(c_i + \tfrac{1}{2} c_{12i}\big)\big(c_j + \tfrac{1}{2} c_{12j}\big) - \tfrac{1}{d}\delta_{ij} c^2 - \tfrac{1}{d}\delta_{ij} \tfrac{1}{4} c_{12}^2 - \tfrac{1}{d}\delta_{ij}(c\cdot c_{12}) \Big] \Big[1 + a_2 S_2(c_{12}^2) \Big]$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} dc_{12}\, |c_{12}|\, e^{-\frac{1}{2}c_{12}^2} \int_{\mathbb{R}^d} dc\, e^{-2c^2} \Big(c_i c_j + \tfrac{1}{2} c_i c_{12j} + \tfrac{1}{2} c_j c_{12i} + \tfrac{1}{4} c_{12i} c_{12j} - \tfrac{1}{d}\delta_{ij} c^2 - \tfrac{1}{4d}\delta_{ij} c_{12}^2 - \tfrac{1}{d}\delta_{ij}(c\cdot c_{12}) \Big)$$

$$+ a_2 \int_{\mathbb{R}^d} dc_{12}\, |c_{12}|\, e^{-\frac{1}{2}c_{12}^2} \int_{\mathbb{R}^d} dc\, e^{-2c^2} \Big(c_i c_j + \tfrac{1}{2} c_i c_{12j} + \tfrac{1}{2} c_j c_{12i} + \tfrac{1}{4} c_{12i} c_{12j} - \tfrac{1}{d}\delta_{ij} c^2 - \tfrac{1}{4d}\delta_{ij} c_{12}^2 - \tfrac{1}{d}\delta_{ij}(c\cdot c_{12}) \Big) \times$$
$$\times \Big(\tfrac{1}{2}c^4 + \tfrac{1}{32} c_{12}^4 + \tfrac{1}{4} c^2 c_{12}^2 - \tfrac{d+2}{2} c^2 - \tfrac{d+2}{8} c_{12}^2 + \tfrac{1}{2}(c\cdot c_{12})^2 - c^2 (c\cdot c_{12}) - \tfrac{1}{4} c_{12}^2 (c\cdot c_{12}) + \tfrac{d+2}{2}(c\cdot c_{12}) + \tfrac{d(d+2)}{4} \Big)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} dc_{12}\, |c_{12}|\, e^{-1/2\, c_{12}^2} \int_{\mathbb{R}^d} dc\, e^{-2c^2} c_i c_j + \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^d} dc_{12}\, |c_{12}|\, c_{12i}\, c_{12j}\, e^{-1/2\, c_{12}^2} \int_{\mathbb{R}^d} dc\, e^{-2c^2}$$

$$-\frac{1}{d}\delta_{ij}\int_{\mathbb{R}^d} dc_{12}\, |c_{12}|\, e^{-1/2\, c_{12}^2}\int_{\mathbb{R}^d} dc\, c^2 e^{-2c^2} - \frac{1}{4d}\delta_{ij}\int_{\mathbb{R}^d} dc_{12}\, |c_{12}|^3 e^{-1/2\, c_{12}^2}\int_{\mathbb{R}^d} dc\, e^{-2c^2}$$

$$+ a_2 \int_{\mathbb{R}^d} dc_{12}\, |c_{12}|\, e^{-1/2\, c_{12}^2}\int_{\mathbb{R}^d} dc\, e^{-2c^2}\Big[c_ic_j \frac{1}{2}c^4 + c_ic_j\frac{1}{32}c_{12}^4 + c_ic_j\frac{1}{4}c^2c_{12}^2 + c_ic_j\left(-\frac{d+2}{2}\right)c^2 - c_ic_j\frac{d+2}{8}c_{12}^2$$

$$+ c_ic_j\frac{1}{2}(c\cdot c_{12})^2 - c_ic_j c^2(c\cdot c_{12}) - c_ic_j\frac{1}{4}c_{12}^2(c\cdot c_{12}) + c_ic_j\frac{d+2}{2}(c\cdot c_{12})$$

$$+ c_ic_j\frac{d(d+2)}{4} + \frac{1}{2}c_ic_{12j}\frac{1}{2}c^4 + \frac{1}{2}c_ic_{12j}\frac{1}{32}c_{12}^4 + \frac{1}{2}c_ic_{12j}\frac{1}{4}c^2c_{12}^2 - \frac{1}{2}c_ic_{12j}\frac{d+2}{2}c^2$$

$$- \frac{1}{2}c_ic_{12j}\frac{d+2}{8}c_{12}^2 + \frac{1}{2}c_ic_{12j}\frac{1}{2}(c\cdot c_{12})^2 - \frac{1}{2}c_ic_{12j}c^2(c\cdot c_{12}) - \frac{1}{2}c_ic_{12j}\frac{1}{4}c_{12}^2(c\cdot c_{12})$$

$$+ \frac{1}{2}c_ic_{12j}\frac{d+2}{2}(c\cdot c_{12}) + \frac{1}{2}c_ic_{12j}\frac{d(d+2)}{4} + \frac{1}{2}c_jc_{12i}\frac{1}{2}c^4 + \frac{1}{2}c_jc_{12i}\frac{1}{32}c_{12}^4$$

$$+ \frac{1}{2}c_jc_{12i}\frac{1}{4}c^2c_{12}^2 - \frac{1}{2}c_jc_{12i}\frac{d+2}{2}c^2 - \frac{1}{2}c_jc_{12i}\frac{d+2}{8}c_{12}^2 + \frac{1}{2}c_jc_{12i}\frac{1}{2}(c\cdot c_{12})^2$$

$$- \frac{1}{2}c_jc_{12i}c^2(c\cdot c_{12}) - \frac{1}{2}c_jc_{12i}\frac{1}{4}c_{12}^2(c\cdot c_{12}) + \frac{1}{2}c_jc_{12i}\frac{d+2}{2}(c\cdot c_{12})$$

$$+ \frac{1}{2}c_jc_{12i}\frac{d(d+2)}{4} + \frac{1}{4}c_{12i}c_{12j}\frac{1}{2}c^4 + \frac{1}{4}c_{12i}c_{12j}\frac{1}{32}c_{12}^4 + \frac{1}{4}c_{12i}c_{12j}\frac{1}{4}c^2c_{12}^2$$

$$- \frac{1}{4}c_{12i}c_{12j}\frac{d+2}{2}c^2 - \frac{1}{4}c_{12i}c_{12j}\frac{d+2}{8}c_{12}^2 + \frac{1}{4}c_{12i}c_{12j}\frac{1}{2}(c\cdot c_{12})^2$$

$$- \frac{1}{4}c_{12i}c_{12j}c^2(c\cdot c_{12}) - \frac{1}{4}c_{12i}c_{12j}\frac{1}{4}c_{12}^2(c\cdot c_{12}) + \frac{1}{4}c_{12i}c_{12j}\frac{d+2}{2}(c\cdot c_{12})$$

$$+ \frac{1}{4}c_{12i}c_{12j}\frac{d(d+2)}{4} - \frac{1}{d}\delta_{ij}c^2\frac{1}{2}c^4 - \frac{1}{d}\delta_{ij}c^2\frac{1}{32}c_{12}^4 - \frac{1}{d}\delta_{ij}c^2\frac{1}{4}c^2c_{12}^2$$

$$+ \frac{1}{d}\delta_{ij}c^2\frac{d+2}{2}c^2 + \frac{1}{d}\delta_{ij}c^2\frac{d+2}{8}c_{12}^2 - \frac{1}{d}\delta_{ij}c^2\frac{1}{2}(c\cdot c_{12})^2 + \frac{1}{d}\delta_{ij}c^2c^2(c\cdot c_{12})$$

$$+ \frac{1}{d}\delta_{ij}c^2\frac{1}{4}c_{12}^2(c\cdot c_{12}) - \frac{1}{d}\delta_{ij}c^2\frac{d+2}{2}(c\cdot c_{12}) - \frac{1}{d}\delta_{ij}c^2\frac{d(d+2)}{4}$$

$$- \frac{1}{4d}\delta_{ij}c_{12}^2\frac{1}{2}c^4 - \frac{1}{4d}\delta_{ij}c_{12}^2\frac{1}{32}c_{12}^4 - \frac{1}{d}\delta_{ij}c_{12}^2\frac{1}{4}c^2c_{12}^2 + \frac{1}{4d}\delta_{ij}c_{12}^2\frac{d+2}{2}c^2$$

$$+ \frac{1}{4d}\delta_{ij}c_{12}^2\frac{d+2}{8}c_{12}^2 - \frac{1}{4d}\delta_{ij}c_{12}^2\frac{1}{2}(c\cdot c_{12})^2 + \frac{1}{4d}\delta_{ij}c_{12}^2c^2(c\cdot c_{12}) + \frac{1}{4d}\delta_{ij}c_{12}^2\frac{1}{4}c_{12}^2(c\cdot c_{12})$$

$$- \frac{1}{4d}\delta_{ij}c_{12}^2\frac{d+2}{2}(c\cdot c_{12}) - \frac{1}{4d}\delta_{ij}c_{12}^2\frac{d(d+2)}{4} - \frac{1}{d}\delta_{ij}(c\cdot c_{12})\frac{1}{2}c^4 - \frac{1}{d}\delta_{ij}(c\cdot c_{12})\frac{1}{32}c_{12}^4$$

$$- \frac{1}{d}\delta_{ij}(c\cdot c_{12})\frac{1}{4}c^2c_{12}^2 + \frac{1}{d}\delta_{ij}(c\cdot c_{12})\frac{d+2}{2}c^2 + \frac{1}{d}\delta_{ij}(c\cdot c_{12})\frac{d+2}{8}c_{12}^2$$

$$- \frac{1}{d}\delta_{ij}(c\cdot c_{12})\frac{1}{2}(c\cdot c_{12})^2 + \frac{1}{d}\delta_{ij}(c\cdot c_{12})c^2(c\cdot c_{12}) + \frac{1}{d}\delta_{ij}(c\cdot c_{12})\frac{1}{4}c_{12}^2(c\cdot c_{12})$$

$$- \frac{1}{d}\delta_{ij}(c\cdot c_{12})\frac{d+2}{2}(c\cdot c_{12}) - \frac{1}{d}\delta_{ij}(c\cdot c_{12})\frac{d(d+2)}{4}\Big] \qquad (7)$$

On voit qu'apparaissent des termes de type $c_ic_{12j}c_kc_{12k}$ ainsi que $c_ic_{12j}(c\cdot c_{12})^2 = c_ic_{12j}c_kc_lc_{12k}c_{12l}$ qu'il faut intégrer. Nous avons donc besoin des deux lemmes suivants.

lemmes utilisés avant

Définissons

$$I^a[n] = \int_{\mathbb{R}^d} dx\, |x|^n e^{-ax^2} = \frac{\pi^{d/2}}{a^{\frac{d+n}{2}}} \frac{\Gamma(\frac{d+n}{2})}{\Gamma(d/2)}, \qquad (17)$$

et notant $M_{ij}[n] = M^a_{ij}[n]$, $M_{ijk\ell}[n] = M^a_{ijk\ell}[n]$, alors l'Eq. (7) devient :

$$\begin{aligned}
I_2 = {} & I^{1/2}[1]\, M^2_{ij}[0] + \tfrac{1}{4} M^{1/2}_{ij}[1]\, I^2[0] - \tfrac{1}{d}\delta_{ij}\, I^{1/2}[1]\, I^2[2] - \tfrac{1}{4d}\delta_{ij}\, I^{1/2}[3]\, I^2[0] \\
& + a_2 \Big\{ \tfrac{1}{2} I^{1/2}[1]\, M^2_{ij}[4] + \tfrac{1}{32} I^{1/2}[5]\, M^2_{ij}[0] + \tfrac{1}{4} I^{1/2}[3]\, M^2_{ij}[2] - \tfrac{d+2}{2} I^{1/2}[1]\, M^2_{ij}[2] \\
& - \tfrac{d+2}{8} I^{1/2}[3]\, M^2_{ij}[0] + \tfrac{1}{2} \boxed{M^{1/2}_{k\ell}[1]\, M^2_{ijk\ell}[0]} + \tfrac{d(d+2)}{4} I^{1/2}[1]\, M^2_{ij}[0] \\
& \left.\begin{aligned} & - \tfrac{1}{2} M^{1/2}_{jk}[1]\, M^2_{ik}[2] - \tfrac{1}{8} M^{1/2}_{jk}[3]\, M^2_{ik}[0] + \tfrac{d+2}{4} M^{1/2}_{jk}[1]\, M^2_{ik}[0] \\ & - \tfrac{1}{2} M^{1/2}_{ik}[1]\, M^2_{jk}[2] - \tfrac{1}{8} M^{1/2}_{ik}[3]\, M^2_{jk}[0] + \tfrac{d+2}{4} M^{1/2}_{ik}[1]\, M^2_{jk}[0] \end{aligned}\right\} \ominus \\
& + \tfrac{1}{8} M^{1/2}_{ij}[1]\, I^2[4] + \tfrac{1}{128} M^{1/2}_{ij}[5]\, I^2[0] + \tfrac{1}{16} M^{1/2}_{ij}[3]\, I^2[2] \\
& - \tfrac{d+2}{8} M^{1/2}_{ij}[1]\, I^2[2] - \tfrac{d+2}{32} M^{1/2}_{ij}[3]\, I^2[0] + \tfrac{1}{8} \boxed{M^{1/2}_{ijk\ell}[1]\, M^2_{k\ell}[0]} \\
& + \tfrac{d(d+2)}{16} M^{1/2}_{ij}[1]\, I^2[0] - \tfrac{1}{2d}\delta_{ij}\, I^{1/2}[1]\, I^2[6] - \tfrac{1}{32d}\delta_{ij}\, I^{1/2}[5]\, I^2[2] \\
& - \tfrac{1}{4d}\delta_{ij}\, I^{1/2}[3]\, I^2[4] + \tfrac{d+2}{2d}\delta_{ij}\, I^{1/2}[1]\, I^2[4] + \tfrac{d+2}{8d}\delta_{ij}\, I^{1/2}[3]\, I^2[2] \\
& - \tfrac{1}{2d}\delta_{ij}\, M^{1/2}_{k\ell}[1]\, M^2_{k\ell}[2] - \tfrac{d+2}{4}\delta_{ij}\, I^{1/2}[1]\, I^2[2] - \tfrac{1}{8d}\delta_{ij}\, I^{1/2}[3]\, I^2[4] \\
& - \tfrac{1}{128d}\delta_{ij}\, I^{1/2}[7]\, I^2[0] - \tfrac{1}{4d}\delta_{ij}\, I^{1/2}[5]\, I^2[2] + \tfrac{d+2}{8d}\delta_{ij}\, I^{1/2}[3]\, I^2[2] \\
& + \tfrac{d+2}{32d}\delta_{ij}\, I^{1/2}[5]\, I^2[0] - \tfrac{1}{8d}\delta_{ij}\, M^{1/2}_{k\ell}[3]\, M^2_{k\ell}[0] - \tfrac{d+2}{16}\delta_{ij}\, I^{1/2}[3]\, I^2[0] \\
& + \tfrac{1}{d}\delta_{ij}\, M^{1/2}_{k\ell}[1]\, M^2_{k\ell}[2] + \tfrac{1}{4d}\delta_{ij}\, M^{1/2}_{k\ell}[3]\, M^2_{k\ell}[0] - \tfrac{d+2}{2d}\delta_{ij}\, M^{1/2}_{k\ell}[1]\, M^2_{k\ell}[0] \Big\} \qquad (17)
\end{aligned}$$

Pour simplifier cette expression, on constate que comme $M_{ij} \sim \delta_{ij}$, alors $M^{1/2}_{jk} M^2_{ik} = M^{1/2}_{ik} M^2_{jk} = M^{1/2} M^2 \delta_{ij}$, où M^a est défini par l'Eq. (9). De plus $M^{1/2}_{k\ell} M^2_{k\ell} = d\, M^{1/2} M^2$. Finalement utilisant les Eqs. (14) et (16) :

$$\begin{aligned}
M^a_{ijk\ell}\, M^{a'}_{k\ell} &= b^a M^{a'} \underbrace{\delta_{ijk\ell}\,\delta_{k\ell}}_{= \delta_{ij}\delta_{k\ell}\delta_{ik}\delta_{k\ell} = \delta_{ij}} + \frac{b^a}{3} M^{a'} \left[\delta_{ij}\delta_{k\ell}(1-\delta_{ik}) + \delta_{ik}\delta_{j\ell}(1-\delta_{ij}) + \delta_{i\ell}\delta_{jk}(1-\delta_{ij}) \right] \delta_{k\ell} \\
&= b^a M^{a'} \delta_{ij} + \frac{b^a}{3} M^{a'} \Big[\delta_{ij} \underbrace{\sum_{k\ell} \delta_{k\ell}(1-\delta_{ik})}_{= \sum_{k\ell}\delta_{k\ell} - \sum_k \delta_{ik} \sum_\ell \delta_{k\ell} = d - \sum_k \delta_{ik}} + (1-\delta_{ij}) \underbrace{\sum_{k\ell} \delta_{ik}\delta_{j\ell}\delta_{k\ell}}_{= \sum_k \delta_{ik} \underbrace{\sum_\ell \delta_{j\ell}\delta_{k\ell}}_{=\delta_{jk}} = \delta_{ij}} + (1-\delta_{ij}) \underbrace{\sum_{k\ell} \delta_{i\ell}\delta_{jk}\delta_{k\ell}}_{= \sum_k \delta_{jk} \underbrace{\sum_\ell \delta_{i\ell}\delta_{k\ell}}_{=\delta_{ik}} = \delta_{ij}} \Big] \\
&= b^a M^{a'} \delta_{ij} + \frac{b^a}{3} M^{a'} \Big[\delta_{ij}(d-1) + \underbrace{(1-\delta_{ij})\delta_{ij}}_{= \delta_{ij} - \delta_{ij}^2 = 0} + \underbrace{(1-\delta_{ij})\delta_{ij}}_{= \delta_{ij} - \delta_{ij}^2 = 0} \Big] \\
&= b^a M^{a'} \delta_{ij} \left(1 + \frac{d-1}{3} \right) \\
&= \frac{d+2}{3} b^a M^{a'} \delta_{ij} \qquad (18)
\end{aligned}$$

L'Eq. (17) devient ainsi :

$$I_2 = \delta_{ij}\left\{ I^{1/2}[1]\,M^2[0] + \frac{1}{4}M^{1/2}[1]\,I^2[0] - \frac{1}{d}I^{1/2}[1]\,I^2[0] - \frac{1}{4d}I^{1/2}[3]\,I^2[0]\right\}$$

$$+ \delta_{ij}a_2\left\{ \frac{1}{2}I^{1/2}[1]\,M^2[4] + \frac{1}{32}I^{1/2}[5]\,M^2[0] + \frac{1}{4}I^{1/2}[3]\,M^2[2] - \frac{d+2}{2}I^{1/2}[1]\,M^2[2] \right.$$

$$- \frac{d+2}{8}I^{1/2}[3]\,M^2[0] + \frac{d+2}{6}M^{1/2}[1]\,b^2[0] + \frac{d(d+2)}{4}I^{1/2}[1]\,M^2[0]$$

$$- M^{1/2}[1]\,M^2[2] - \frac{1}{4}M^{1/2}[3]\,M^2[0] + \frac{d+2}{2}M^{1/2}[1]\,M^2[0]$$

$$+ \frac{1}{8}M^{1/2}[1]\,I^2[4] + \frac{1}{128}M^{1/2}[5]\,I^2[0] + \frac{1}{16}M^{1/2}[3]\,I^2[2]$$

$$- \frac{d+2}{8}M^{1/2}[1]\,I^2[2] - \frac{d+2}{32}M^{1/2}[3]\,I^2[0] + \frac{d+2}{24}b^{1/2}[1]\,M^2[0]$$

$$+ \frac{d(d+2)}{16}M^{1/2}[1]\,I^2[0] - \frac{1}{2d}I^{1/2}[1]\,I^2[6] - \frac{1}{32d}I^{1/2}[5]\,I^2[2]$$

$$- \frac{1}{4d}I^{1/2}[3]\,I^2[4] + \frac{d+2}{2d}I^{1/2}[1]\,I^2[4] + \frac{d+2}{8d}I^{1/2}[3]\,I^2[2]$$

$$- \frac{1}{2}M^{1/2}[1]\,M^2[2] - \frac{d+2}{4}I^{1/2}[1]\,I^2[2] - \frac{1}{8d}I^{1/2}[3]\,I^2[4]$$

$$- \frac{1}{128d}I^{1/2}[7]\,I^2[0] - \frac{1}{4d}I^{1/2}[5]\,I^2[2] + \frac{d+2}{8d}I^{1/2}[3]\,I^2[2]$$

$$+ \frac{d+2}{32d}I^{1/2}[5]\,I^2[0] - \frac{1}{8}M^{1/2}[3]\,M^2[0] - \frac{d+2}{16}I^{1/2}[3]\,I^2[0]$$

$$\left. + M^{1/2}[1]\,M^2[2] + \frac{1}{4}M^{1/2}[3]\,M^2[0] - \frac{d+2}{2}M^{1/2}[1]\,M^2[0] \right.$$

$$= \delta_{ij}\left\{ I^{1/2}[1]\,M^2[0] + \frac{1}{4}M^{1/2}[1]\,I^2[0] - \frac{1}{d}I^{1/2}[1]\,I^2[0] - \frac{1}{4d}I^{1/2}[3]\,I^2[0]\right\}$$

$$+ \delta_{ij}a_2\left\{ \frac{1}{2}I^{1/2}[1]\,M^2[4] + \frac{1}{32}I^{1/2}[5]\,M^2[0] + \frac{1}{4}I^{1/2}[3]\,M^2[2] - \frac{d+2}{2}I^{1/2}[1]\,M^2[2] \right.$$

$$- \frac{d+2}{8}I^{1/2}[3]\,M^2[0] + \frac{d+2}{6}M^{1/2}[1]\,b^2[0] + \frac{d(d+2)}{4}I^{1/2}[1]\,M^2[0] - \frac{1}{2}M^{1/2}[1]\,M^2[2]$$

$$- \frac{1}{8}M^{1/2}[3]\,M^2[0] + \frac{1}{8}M^{1/2}[1]\,I^2[4] + \frac{1}{128}M^{1/2}[5]\,I^2[0] + \frac{1}{16}M^{1/2}[3]\,I^2[2]$$

$$- \frac{d+2}{8}M^{1/2}[1]\,I^2[2] - \frac{d+2}{32}M^{1/2}[3]\,I^2[0] + \frac{d+2}{24}b^{1/2}[1]\,M^2[0] + \frac{d(d+2)}{16}M^{1/2}[1]\,I^2[0]$$

$$- \frac{1}{2d}I^{1/2}[1]\,I^2[6] - \frac{17}{32d}I^{1/2}[5]\,I^2[2] - \frac{3}{8d}I^{1/2}[3]\,I^2[4] + \frac{d+2}{2d}I^{1/2}[1]\,I^2[4]$$

$$+ \frac{d+2}{4d}I^{1/2}[3]\,I^2[2] - \frac{d+2}{4}I^{1/2}[1]\,I^2[2] - \frac{1}{128d}I^{1/2}[7]\,I^2[0] + \frac{d+2}{32d}I^{1/2}[5]\,I^2[0]$$

$$\left. - \frac{d+2}{16}I^{1/2}[3]\,I^2[0] \right\}$$

On simplifie cette expression à l'aide d'un logiciel de calcul symbolique :

$$I_2 = \delta_{ij}\frac{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)}{\Gamma(d/2)}\pi^d\left[2^{-3/2}\frac{d-4}{d} + a_2\frac{d+1}{d}2^{-\frac{15+d}{2}}\left(2^{d+5}(d+2) + 2^{1/2}(d+3) - 2^{\frac{d+4}{2}}(10+25d+7d^2)\right)\right]$$

$$= \delta_{ij}\frac{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)}{\Gamma(d/2)}\frac{\pi^d}{d}\left[2^{-3/2}(d-4) + a_2(d+1)2^{-\frac{15+d}{2}}\left\{2^{d+5}(d+2) + 2^{1/2}(d+3) - 2^{\frac{d+4}{2}}(10+25d+7d^2)\right\}\right] \quad (19)$$

Ainsi les Eqs. (19) et (6) dans (2) donne :

$$\xi_n^{(1)} = -2\beta_1 \frac{\sigma^{d-1}\beta^3}{\pi^d} v_T \frac{\eta}{\beta} m v_T^2 \nabla_j u_i \, \delta_{ij} \frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})}{\Gamma(d/2)} \frac{\pi^d}{d} [\ \dots\ ]$$

$$= -2 \frac{\pi^{\frac{d-1}{2}}}{\Gamma(\frac{d+1}{2})} \frac{\sigma^{d-1}\beta^3}{\pi^d} \sqrt{\frac{2}{\beta m}} \underbrace{\frac{d+2}{8} \frac{\Gamma(d/2)}{\pi^{\frac{d-1}{2}}} \frac{\sqrt{m k_B T}}{\sigma^{d-1}}}_{=\eta_0} \underbrace{\frac{1}{\nu_\eta^* - \frac{1}{2} p \xi_T^{(0)*}}}_{=\eta^*} \frac{1}{\beta} \frac{2}{\beta m} \nabla_i u_i \frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})}{\Gamma(d/2)} \frac{\pi^d}{d} [\dots]$$

$$= -4\sqrt{2} \frac{d+2}{8} \eta^* \frac{1}{d} \nabla_i u_i [\dots]$$

$$= -\frac{d+2}{2d} \sqrt{2} \eta^* \nabla_i u_i \, 2^{-1/2} \left[\frac{d-4}{2} + a_2 \frac{d+1}{2^{\frac{d+14}{2}}} \left\{ 2^{d+5}(d+2) + 2^{1/2}(d+3) - 2^{\frac{d}{2}+2}(10+25d+7d^2) \right\} \right]$$

$$= -\frac{d+2}{4d} \eta^* \nabla_i u_i \left[d-4 + a_2 \frac{d+1}{2^{d/2+6}} \left\{ 2^{d+5}(d+2) + 2^{1/2}(d+3) - 2^{d/2+2}(10+25d+7d^2) \right\} \right]$$

$$\boxed{\xi_n^{(1)} = -\eta^* \frac{d+2}{4d} \left[d-4 + a_2 \frac{d+1}{2^{d/2+6}} \left\{ 2^{d+5}(d+2) + 2^{1/2}(d+3) - 2^{d/2+2}(10+25d+7d^2) \right\} \right] \nabla_i u_i} \quad \text{or unité} \qquad (20)$$

On a aussi $\xi_n^{(1)*} = \xi_n^{(1)} / \nu_0$; $\nu_0 = p^{(0)} / \eta_0$

Question : taille du système pour avoir instabilités ? $e^{i\underline{k}\cdot\underline{\ell}}$, où $\underline{k}$ et $\underline{\ell}$ sont sans dimensions. Nos relations : trouver la taille du système correspondant à $k=1$, i.e. k petit $\leftrightarrow$ système grand
instabilité $\leftrightarrow$ syst. grand.

On a :

$$\begin{cases} \underline{\ell} = \frac{1}{2} V_{OH}(t) \sqrt{\frac{m}{k_B T_H(t)}}\, \underline{r} \\ T_H(t) = T_0 \left(1 + p\, t/t_0\right)^{\gamma_T} \; ; \; n_H(t) = n_0 \left(1 + p\, t/t_0\right)^{\gamma_n} \\ \gamma_T = \xi_T^{(c)}/t_0 \; ; \; \gamma_n = \xi_n^{(c)}/t_0 \\ t_0 = \xi_n^{(c)}(0) + \xi_T^{(c)}(0)/2 = V_0 \left(\xi_n^{(c)*}(0) + \xi_T^{(c)*}(0)/2\right) \\ \xi_n^{(c)*} = \frac{d+2}{4}\left(1 - a_2/16\right) \; ; \; \xi_T^{(c)*} = \frac{d+2}{8d}\left(1 + a_2 \frac{8d+11}{16}\right) \\ a_2 = 8 \frac{3 - 2\sqrt{2}}{4d + 6 - \sqrt{2} + \frac{1-p}{p} 8\sqrt{2}(d-1)} \\ V_{OH}(t) = \frac{p^{(c)}}{\eta_0} = n_H k_B T_H(t) \cdot \frac{8}{d+2} \frac{\pi^{(d-1)/2}}{\Gamma(d/2)} \frac{\sigma^{d-1}}{\sqrt{m k_B T_H}} = \underbrace{\frac{8}{d+2} \frac{\pi^{(d-1)/2}}{\Gamma(d/2)}}_{:= C(d)} n_H(t) \sigma^{d-1} \sqrt{\frac{k_B T_H(t)}{m}} \end{cases}$$

Ainsi :

$$\underline{\ell} = \frac{1}{2} C(d)\, n_H(t) \sigma^{d-1} \sqrt{\frac{k_B T_H(t)}{m}} \sqrt{\frac{m}{k_B T_H(t)}}\, \underline{r} = \frac{1}{2} C(d) \underbrace{n_H(t) \sigma^{d-1} \underline{r}}_{\text{sans dimension}}$$

$$= \frac{1}{2} C(d)\, n_0 \sigma^{d-1} \underline{r} \left(1 + p \frac{t}{t_0}\right)^{\gamma_n}$$

$$\gamma_n = \frac{\xi_n^{(c)*}}{\xi_n^{(c)*} + \xi_T^{(c)*}/2}$$

$$t_0 = V_0\left(\xi_n^{(c)*}(0) + \xi_T^{(c)*}(0)/2\right) = C(d)\, n_0 \sigma^{d-1} \sqrt{\frac{k_B T_0}{m}}$$

Conclusion : les unités de k sont données par $k\cdot\ell = k\cdot r/\ell_0 = (k/\ell_0)\cdot r$, donc par celles de ℓ_0

$$\ell_0 = \underbrace{\frac{1}{2} C(d) \left(1 + p \frac{t}{C(d)\, n_0 \sigma^{d-1} \sqrt{\frac{k_B T_0}{m}}}\right)^{\frac{\xi_n^{(c)*}}{\xi_n^{(c)*} + \xi_T^{(c)*}/2}}}_{= \tilde{\ell}_0} \underbrace{n_0 \sigma^{d-1}}_{\text{unités : } 1/L} \; ; \; C(d) = \frac{8}{d+2} \frac{\pi^{(d-1)/2}}{\Gamma(d/2)}$$

La question : si $k = 1$, alors que vaut $\underline{r}$? $\underline{r}$ vaudra $\tilde{\ell}_0$ en unité $(n_0 \sigma^{d-1})^{-1}$. En effet :

$$k\cdot\ell = k\, r/\ell_0 = k\, r/(\tilde{\ell}_0 n_0 \sigma^{d-1}) = \frac{k}{\tilde{\ell}_0} \frac{r}{n_0 \sigma^{d-1}} = \frac{k}{n_0 \sigma^{d-1}} \frac{r}{\tilde{\ell}_0}$$

Les unités de k sont (ici $k := m$)

$$m\ell = \frac{k}{k_0} \frac{r}{r_0} \; ; \; m = \frac{k}{k_0} \; ; \; \ell = \frac{r}{r_0} \; ; \; [m\ell] = [-] \Rightarrow k_0 = r_0^{-1}$$

$$m = \frac{k}{k_0} \Downarrow k = k_0 m \qquad \ell = \frac{r}{r_0} \Downarrow r = r_0 \ell$$

$$\Rightarrow k = k_0 m = \frac{1}{r_0} m$$

retour aux notations initiales $\Rightarrow$ $K_{dim} = \frac{1}{\ell_0}{}^{-1} K_{adim}$

$$\Rightarrow \boxed{K_{dim} = \tilde{\ell}_0 n_0 \sigma^{d-1}\, K}$$

La taille du système est donc donnée par

$$\frac{1}{K_{dim}} = \underbrace{\frac{1}{\tilde{\ell}_0 n_0 \sigma^{d-1}}}_{[\ldots] = L} \frac{1}{K}$$

Calculs à vérifier : coefficients de viscosité ν_κ^*, ν_μ^*, ν_η^*

$$\nu_\eta^* = \frac{\beta^2}{(d+2)(d-1)n\nu_0}\left[\int_{\mathbb{R}^d} dv\, D_{ij}(v)\, J[\mathcal{M} D_{ij}] - p\int_{\mathbb{R}^d} dv\, D_{ij}(v)\, \Omega[\mathcal{M} D_{ij}]\right] = p\nu_\eta^{*a} + (1-p)\,\nu_\eta^{*c} + p\nu_\eta^{*a'}$$

$$\nu_\mu^* = \nu_\kappa^* = \frac{2m\beta^3}{d(d+2)n\nu_0}\left[\int_{\mathbb{R}^d} dv\, S_i(v)\, J[\mathcal{M} S_i] - p\int_{\mathbb{R}^d} dv\, S_i(v)\, \Omega[\mathcal{M} S_i]\right] = p\nu_\mu^{*a} + (1-p)\,\nu_\mu^{*c} + p\nu_\mu^{*a'}$$

$$Jg = p L_a g + (1-p) L_c g$$

$$L_a g = \sigma^{d-1}\beta_1 \int_{\mathbb{R}^d} d\underline{v_2}\, |\underline{v_{12}}| \left[g(\underline{r_1},\underline{v_1};t)\, f^{(0)}(\underline{v_2};t) + f^{(0)}(\underline{v_1};t)\, g(\underline{r_1},\underline{v_2};t)\right]$$

$$L_c g = -\sigma^{d-1}\int_{\mathbb{R}^d} d\underline{v_2}\int d\hat{\sigma}\; \theta(\hat{\sigma}\cdot\underline{v_{12}})\,(\hat{\sigma}\cdot\underline{v_{12}})\,(b^{-1}-1)\left[g(\underline{r_1},\underline{v_1};t)\, f^{(0)}(\underline{v_2};t) + f^{(0)}(\underline{v_1};t)\, g(\underline{r_1},\underline{v_2};t)\right]$$

: pas besoin de refaire le calcul avec L_c

Avec:

$$\beta = 1/k_B T$$

$$\nu_0 = \frac{p^{(0)}}{\eta_0} = n k_B T\left(\frac{d+2}{8}\,\frac{\Gamma(d/2)}{\pi^{(d-1)/2}}\,\frac{\sqrt{m k_B T}}{\sigma^{d-1}}\right)^{-1}$$

$$\beta_1 = \frac{\pi^{(d-1)/2}}{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)}$$

$$D_{ij}(\underline{v}) = m\left(V_i V_j - \frac{1}{d}V^2\delta_{ij}\right)$$

$$\underline{S}(\underline{v}) = \left(\frac{m}{2}v^2 - \frac{d+2}{2}k_B T\right)\underline{V}$$

$$f^{(0)}(v) = \frac{n}{v_T^d}\frac{1}{\pi^{d/2}} e^{-V^2/v_T^2}\left[1 + a_2 S_2\left(\frac{V^2}{v_T^2}\right)\right] \quad ; \quad v_T = \sqrt{\frac{2}{\beta m}}$$

$$\mathcal{M}(v) = \frac{n}{v_T^d}\frac{1}{\pi^{d/2}} e^{-V^2/v_T^2}$$

$$S_2(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{d+2}{2}x + \frac{d(d+2)}{8}$$

$$\Omega[\mathcal{M}g_i] = f^{(0)}\frac{2}{n}\omega[f^{(0)},\mathcal{M}g_i] - \frac{\partial f^{(0)}}{\partial V_j}v_T\,\frac{1}{n v_T}\left\{\omega[f^{(0)},V_j\mathcal{M}g_i] + \omega[V_j f^{(0)},\mathcal{M}g_i]\right\}$$
$$+ \frac{\partial f^{(0)}}{\partial T}\,T\left\{-\frac{2}{n}\omega[f^{(0)},\mathcal{M}g_i] + \frac{m}{n k_B T d}\omega[f^{(0)},V^2\mathcal{M}g_i] + \frac{m}{n k_B T d}\omega[V^2 f^{(0)},\mathcal{M}g_i]\right\}$$

$$\omega[f,g] = \sigma^{d-1}\beta_1\int_{\mathbb{R}^{2d}} d\underline{v_1}\,d\underline{v_2}\,|\underline{v_{12}}|\, g(\underline{r_1},\underline{v_1};t)\, f(\underline{r_2},\underline{v_2};t)$$

Et:

$$\underline{S_1}(p,k) = p\,\xi_T^{(0)*} - \frac{1}{2}\eta^* k^2$$

$$\eta^* = \frac{1}{\nu_\eta^* - \frac{1}{2}p\,\xi_T^{(0)*}}$$

$$\xi_T^{(0)*} = \frac{1}{\nu_0}\frac{m}{n k_B T d}\omega[f^{(0)},V^2 f^{(0)}] - \frac{1}{\nu_0}\frac{1}{n}\omega[f^{(0)},f^{(0)}] \quad ; \quad \xi_n^{(0)*} = \frac{1}{\nu_0}\frac{1}{n}\omega[f^{(0)},f^{(0)}]$$

$$\nu_\eta^{*c} = 1 - \frac{1}{32}a_2$$

Vérification de $\xi_T^{(0)*}$ ①

$$\xi_T^{(0)*} = \frac{1}{V_0}\frac{m}{nk_BTd}\,\omega[f^{(0)},V^2f^{(0)}] - \frac{1}{V_0}\frac{1}{n}\,\omega[f^{(0)},f^{(0)}] = \frac{1}{V_0}\frac{m}{nk_BTd}\,\omega[f^{(0)},V^2f^{(0)}] - \xi_n^{(0)} \qquad (1)$$

On commence donc par le calcul de $\xi_n^{(0)*}$:

$$\xi_n^{(0)*} = \frac{\beta}{n}\frac{d+2}{8}\frac{\Gamma(d/2)}{\pi^{(d-1)/2}}\sqrt{\frac{m}{\beta}}\,\frac{1}{\cancel{\sigma^{d-1}}}\,\frac{1}{n}\,\cancel{\sigma^{d-1}}\beta_1\int_{\mathbb{R}^{2d}} dV_1dV_2\,|V_{12}|\,f^{(0)}(V_1)f^{(0)}(V_2)$$

$$= \frac{\beta}{\cancel{n^2}}\sqrt{\frac{m}{\beta}}\frac{d+2}{8}\frac{\Gamma(d/2)}{\cancel{\pi^{(d-1)/2}}}\frac{\cancel{\pi^{(d-1)/2}}}{\Gamma(\frac{d+1}{2})}\int_{\mathbb{R}^{2d}} dV_1dV_2\,|V_{12}|\,\frac{\cancel{n^2}}{V_T^{2d}}\frac{1}{\pi^d}e^{-V_1^2/V_T^2}e^{-V_2^2/V_T^2}\left[1+a_2S_2\left(\frac{V_1^2}{V_T^2}\right)\right]\left[1+a_2S_2\left(\frac{V_2^2}{V_T^2}\right)\right]$$

$$= \sqrt{\beta m}\,\frac{d+2}{8}\frac{\Gamma(d/2)}{\Gamma(\frac{d+1}{2})}\frac{1}{\pi^d}\frac{1}{\cancel{V_T^{2d}}}\int_{\mathbb{R}^{2d}} dc_1dc_2\,\cancel{V_T^{2d}}\,V_T|c_{12}|\,e^{-c_1^2}e^{-c_2^2}\left[1+a_2\{S_2(c_1^2)+S_2(c_2^2)\}\right] + O(a_2^2)$$

$$= \cancel{\sqrt{\beta m}}\,\frac{d+2}{8}\frac{\Gamma(d/2)}{\Gamma(\frac{d+1}{2})}\frac{1}{\pi^d}\sqrt{\frac{2}{\cancel{\beta m}}}\int_{\mathbb{R}^{2d}} dc_1dc_2\,|c_{12}|\,e^{-c_1^2-c_2^2}\left[1+a_2\left\{\tfrac12c_1^4-\tfrac{d+2}{2}c_1^2+\tfrac{d(d+2)}{8}+\tfrac12c_2^4-\tfrac{d+2}{2}c_2^2+\tfrac{d(d+2)}{8}\right\}\right]$$

Coordonnées du centre de masse et relatives :

$$\begin{cases} c_1 = C + \frac12 c_{12} \\ c_2 = C - \frac12 c_{12}\end{cases}$$

$$\Longrightarrow\ c_1^2+c_2^2 = 2C^2+\tfrac12 c_{12}^2$$

$$c_1^4+c_2^4 = \left(C^2+\tfrac14c_{12}^2+(C\cdot c_{12})\right)^2+\left(C^2+\tfrac14c_{12}^2-(C\cdot c_{12})\right)^2$$

$$= \left(C^2+\tfrac14c_{12}^2\right)^2+(C\cdot c_{12})^2+2(C\cdot c_{12})\left(C^2+\tfrac14c_{12}^2\right)+\left(C^2+\tfrac14c_{12}^2\right)^2+(C\cdot c_{12})^2-2(C\cdot c_{12})\left(C^2+\tfrac14c_{12}^2\right)$$

$$= 2C^4+\tfrac18c_{12}^4+C^2c_{12}^2+2\underbrace{(C\cdot c_{12})^2}_{=\frac1d C^2c_{12}^2}\quad \text{(isotropie et symétries)}$$

$$= 2C^4+\tfrac18c_{12}^4+\tfrac{d+2}{d}C^2c_{12}^2$$

Ainsi :

$$\xi_n^{(0)*} = \frac{d+2}{8}\frac{\sqrt2}{\pi^d}\frac{\Gamma(d/2)}{\Gamma(\frac{d+1}{2})}\int_{\mathbb{R}^{2d}} dC\,dc_{12}\,|c_{12}|\,e^{-2C^2}e^{-c_{12}^2/2}\left[1+a_2\left\{C^4+\tfrac{1}{16}c_{12}^4+\tfrac{d+2}{2d}C^2c_{12}^2-\tfrac{d+2}{2}\left(2C^2+\tfrac12c_{12}^2\right)+\tfrac{d(d+2)}{4}\right\}\right]$$

$$= \frac{d+2}{8}\frac{\sqrt2}{\pi^d}\frac{\Gamma(d/2)}{\Gamma(\frac{d+1}{2})}\left[\int_{\mathbb{R}^d} dC\,e^{-2C^2}\int_{\mathbb{R}^d} dc_{12}\,|c_{12}|e^{-c_{12}^2/2} + a_2\int_{\mathbb{R}^{2d}} dC\,dc_{12}\,|c_{12}|\,e^{-2C^2}e^{-c_{12}^2/2}\left[C^4+\tfrac1{16}c_{12}^4+\tfrac{d+2}{2d}C^2c_{12}^2-(d+2)C^2-\tfrac{d+2}{4}c_{12}^2+\tfrac{d(d+2)}{4}\right]\right]$$

On utilise :

$$\int_{\mathbb{R}^d} dx\,|x|^n e^{-ax^2} = \frac{\pi^{d/2}}{a^{\frac{d+n}{2}}}\frac{\Gamma(\frac{d+n}{2})}{\Gamma(d/2)} \doteq I_a[n]$$

Ainsi :

$$\xi_n^{(0)*} = \frac{d+2}{8}\frac{\sqrt2}{\pi^d}\frac{\Gamma(d/2)}{\Gamma(\frac{d+1}{2})}\Big[I_2[0]I_{1/2}[1]+a_2\Big(I_2[4]I_{1/2}[1]+\tfrac1{16}I_2[0]I_{1/2}[5]+\tfrac{d+2}{2d}I_2[2]I_{1/2}[3]-(d+2)I_2[2]I_{1/2}[1] - \tfrac{d+2}{4}I_2[0]I_{1/2}[3]+\tfrac{d(d+2)}{4}I_2[0]I_{1/2}[1]\Big)\Big]$$

$$= \frac{d+2}{8}\frac{\sqrt2}{\pi^d}\frac{\Gamma(d/2)}{\Gamma(\frac{d+1}{2})}\frac{\pi^d}{\Gamma(d/2)^2}\Big[\frac{1}{2^{d/2}}\Gamma(\tfrac d2)\,2^{\frac{d+1}{2}}\Gamma(\tfrac{d+1}{2})+a_2\Big\{\frac{1}{2^{\frac{d+4}{2}}}\Gamma(\tfrac{d+4}{2})\,2^{\frac{d+1}{2}}\Gamma(\tfrac{d+1}{2})+\frac1{16}\frac{1}{2^{d/2}}\Gamma(d/2)\,2^{\frac{d+5}{2}}\Gamma(\tfrac{d+5}{2})$$
$$+\frac{d+2}{2d}\frac{1}{2^{\frac{d+2}{2}}}\Gamma(\tfrac{d+2}{2})\,2^{\frac{d+3}{2}}\Gamma(\tfrac{d+3}{2})-(d+2)\frac{1}{2^{\frac{d+2}{2}}}\Gamma(\tfrac{d+2}{2})\,2^{\frac{d+1}{2}}\Gamma(\tfrac{d+1}{2})$$
$$-\frac{d+2}{4}\frac{1}{2^{d/2}}\Gamma(d/2)\,2^{\frac{d+3}{2}}\Gamma(\tfrac{d+3}{2})+\frac{d(d+2)}{4}\frac{1}{2^{d/2}}\Gamma(\tfrac d2)\,2^{\frac{d+1}{2}}\Gamma(\tfrac{d+1}{2})\Big\}\Big]$$

$$= \frac{d+2}{8}\sqrt2\,\frac{1}{\Gamma(\frac d2)\Gamma(\frac{d+1}{2})}\Big[\sqrt2\,\Gamma(\tfrac d2)\Gamma(\tfrac{d+1}{2})+a_2\Big\{\sqrt2\,\frac1{2^2}\frac{d+2}{2}\frac d2\Gamma(\tfrac d2)\Gamma(\tfrac{d+1}{2})+\sqrt2\,\frac1{2^2}\Gamma(\tfrac d2)\frac{d+3}{2}\frac{d+1}{2}\Gamma(\tfrac{d+1}{2})$$
$$+\sqrt2\,\frac{d+2}{2d}\frac d2\,\Gamma(\tfrac d2)\frac{d+1}{2}\Gamma(\tfrac{d+1}{2})-(d+2)\sqrt2\,\frac12\frac d2\Gamma(\tfrac d2)\Gamma(\tfrac{d+1}{2})$$
$$-\sqrt2\,\frac{d+2}{4}\,2\,\Gamma(\tfrac d2)\frac{d+1}{2}\Gamma(\tfrac{d+1}{2})+\frac{d(d+2)}{4}\sqrt2\,\Gamma(\tfrac d2)\Gamma(\tfrac{d+1}{2})\Big\}\Big]$$

$$= \frac{d+2}{8}\sqrt2\,\frac{1}{\cancel{\Gamma(\frac d2)\Gamma(\frac{d+1}{2})}}\sqrt2\,\cancel{\Gamma(\tfrac d2)\Gamma(\tfrac{d+1}{2})}\left[1+a_2\left\{\frac{d(d+2)}{16}+\frac{(d+3)(d+1)}{16}+\frac{(d+2)(d+1)}{8}-\frac{d(d+2)}{4}-\frac{(d+2)(d+1)}{4}+\frac{d(d+2)}{4}\right\}\right]$$

$$= \frac{d+2}{4}\left[1+a_2\frac1{16}\left\{d(d+2)+(d+3)(d+1)+2(d+2)(d+1)-\cancel{4d(d+2)}-4(d+2)(d+1)+\cancel{4d(d+2)}\right\}\right]$$

$$= \frac{d+2}{4}\left[1+a_2\frac1{16}\left\{(d+2)\overbrace{(d+2d+2-4d-4)}^{=-d-2}+d^2+4d+3\right\}\right]$$

$$= \frac{d+2}{4}\left[1+\frac{a_2}{16}\left\{-(d+2)^2+d^2+4d+3\right\}\right]$$

$$= \frac{d+2}{4}\left[1+\frac{a_2}{16}\left\{\cancel{-d^2}-\cancel{4d}-4\cancel{+d^2}\cancel{+4d}+3\right\}\right]$$

$$= \frac{d+2}{4}\left[1-\frac{a_2}{16}\right] \quad ✓ ? \qquad (2)$$

Calcul du premier terme :

$$\frac{1}{V_0}\frac{m}{nk_BTd}\,\omega\left[f^{(0)},V^2f^{(0)}\right] = \frac{\beta}{n}\frac{d+2}{8}\frac{\Gamma(d/2)}{}\frac{\sqrt{mk_BT}}{}\frac{m}{nk_BTd}\frac{}{\Gamma(\frac{d+1}{2})}\int_{\mathbb{R}^{2d}} dv_1 dv_2\, |V_{12}|\, \underline{V_1}^2 f^{(0)}(V_1) f^{(0)}(V_2)$$

$$= \frac{\beta}{}\frac{d+2}{8}\frac{\Gamma(d/2)}{\Gamma(\frac{d+1}{2})}\sqrt{\frac{m}{\beta}}\frac{m\beta}{d}\int_{\mathbb{R}^{2d}} dc_1dc_2\, |c_{12}|\, V_T V_T^2\, c_1^2 \frac{n^2}{V_T^{2d}}\frac{1}{\pi^d} e^{-c_1^2-c_2^2}\left[1+a_2S_2(c_1^2)\right]\left[1+a_2S_2(c_2^2)\right]$$

$$= \frac{d+2}{8d}\frac{\Gamma(d/2)}{\Gamma(\frac{d+1}{2})}\sqrt{}\ \frac{2}{}\sqrt{\frac{2}{}}\frac{1}{\pi^d}\int_{\mathbb{R}^{2d}} dc_1dc_2\, |c_{12}|\, c_1^2 e^{-c_1^2-c_2^2}\left[1+a_2\left\{S_2(c_1^2)+S_2(c_2^2)\right\}\right] + O(a_2^2)$$

$$= \frac{d+2}{4d}\frac{\Gamma(d/2)}{\Gamma(\frac{d+1}{2})}\frac{\sqrt{2}}{\pi^d}\int_{\mathbb{R}^{2d}} dc\,dc_{12}\, |c_{12}|\left[c^2+\tfrac{1}{4}c_{12}^2+(c\cdot c_{12})\right]e^{-c_1^2-c_2^2}\left[1+a_2\left\{\tfrac{1}{2}(c_1^4+c_2^4)-\tfrac{d+2}{2}(c_1^2+c_2^2)+\tfrac{d(d+2)}{4}\right\}\right]$$

(contribution impaire)

$$= \frac{d+2}{4d}\frac{\Gamma(d/2)}{\Gamma(\frac{d+1}{2})}\frac{\sqrt{2}}{\pi^d}\int_{\mathbb{R}^{2d}} dc\,dc_{12}\, |c_{12}|\left[c^2+\tfrac{1}{4}c_{12}^2+(c\cdot c_{12})\right]e^{-2c^2}e^{-c_{12}^2/2}\left[1+a_2\left\{c^4+\tfrac{1}{16}c_{12}^4+\tfrac{d+2}{2d}c^2c_{12}^2-(d+2)c^2-\tfrac{d+2}{4}c_{12}^2+\tfrac{d(d+2)}{4}\right\}\right]$$

$$= \frac{d+2}{4d}\frac{\Gamma(d/2)}{\Gamma(\frac{d+1}{2})}\frac{\sqrt{2}}{\pi^d}\Big[I_2[2]I_{1/2}[1] + \tfrac{1}{4}I_2[0]I_{1/2}[3]$$
$$+a_2\int_{\mathbb{R}^{2d}} dc\,dc_{12}\,e^{-2c^2}e^{-c_{12}^2/2}\Big[c^6c_{12}+\tfrac{1}{16}c^2c_{12}^5+\tfrac{d+2}{2d}c^4c_{12}^3-(d+2)c^4c_{12}-\tfrac{d+2}{4}c^2c_{12}^3+\tfrac{d(d+2)}{4}c^2c_{12}$$
$$+\tfrac{1}{4}c^4c_{12}^3+\tfrac{1}{64}c_{12}^7+\tfrac{d+2}{8d}c^2c_{12}^5-\tfrac{d+2}{4}c^2c_{12}^3-\tfrac{d+2}{16}c_{12}^5+\tfrac{d(d+2)}{16}c_{12}^3\Big]$$

$$= \frac{d+2}{4d}\frac{\Gamma(d/2)}{\Gamma(\frac{d+1}{2})}\frac{\sqrt{2}}{\pi^d}\Big[I_2[2]I_{1/2}[1]+\tfrac{1}{4}I_2[0]I_{1/2}[3]+a_2\Big(I_2[6]I_{1/2}[1]+\left(\tfrac{1}{16}+\tfrac{d+2}{8d}\right)I_2[2]I_{1/2}[5]+\left(\tfrac{1}{4}+\tfrac{d+2}{2d}\right)I_2[4]I_{1/2}[3]$$
$$-(d+2)I_2[4]I_{1/2}[1]-\tfrac{d+2}{2}I_2[2]I_{1/2}[3]+\tfrac{d(d+2)}{4}I_2[2]I_{1/2}[1]$$
$$+\tfrac{1}{64}I_2[0]I_{1/2}[7]-\tfrac{d+2}{16}I_2[0]I_{1/2}[5]+\tfrac{d(d+2)}{16}I_2[0]I_{1/2}[3]\Big)\Big]$$

$$= \frac{d+2}{4d}\frac{}{\Gamma(\frac{d+1}{2})}\frac{\sqrt{2}}{}\Big[2^{-\frac{d+2}{2}}\frac{\Gamma(\frac{d+2}{2})}{\Gamma(d/2)}2^{\frac{d+1}{2}}\Gamma\left(\tfrac{d+1}{2}\right)+\tfrac{1}{4}2^{-\frac{d}{2}}\frac{\Gamma(d/2)}{\Gamma(d/2)}2^{\frac{d+3}{2}}\Gamma\left(\tfrac{d+3}{2}\right)$$
$$+a_2\Big\{2^{-\frac{d+6}{2}}\frac{\Gamma(\frac{d+6}{2})}{\Gamma(d/2)}2^{\frac{d+1}{2}}\Gamma\left(\tfrac{d+1}{2}\right)+\frac{d+2(d+2)}{16d}2^{-\frac{d+2}{2}}\frac{\Gamma(\frac{d+2}{2})}{\Gamma(d/2)}2^{\frac{d+5}{2}}\Gamma\left(\tfrac{d+5}{2}\right)$$
$$+\frac{d+2(d+2)}{4d}2^{-\frac{d+4}{2}}\frac{\Gamma(\frac{d+4}{2})}{\Gamma(d/2)}2^{\frac{d+3}{2}}\Gamma\left(\tfrac{d+3}{2}\right)-(d+2)2^{-\frac{d+4}{2}}\frac{\Gamma(\frac{d+4}{2})}{\Gamma(d/2)}2^{\frac{d+1}{2}}\Gamma\left(\tfrac{d+1}{2}\right)$$
$$-\frac{d+2}{2}2^{-\frac{d+2}{2}}\frac{\Gamma(\frac{d+2}{2})}{\Gamma(d/2)}2^{\frac{d+3}{2}}\Gamma\left(\tfrac{d+3}{2}\right)+\frac{d(d+2)}{4}2^{-\frac{d+2}{2}}\frac{\Gamma(\frac{d+2}{2})}{\Gamma(d/2)}2^{+\frac{d+1}{2}}\Gamma\left(\tfrac{d+1}{2}\right)$$
$$+\tfrac{1}{64}2^{-\frac{d}{2}}2^{\frac{d+7}{2}}\Gamma\left(\tfrac{d+7}{2}\right)-\tfrac{d+2}{16}2^{-d/2}2^{\frac{d+5}{2}}\Gamma\left(\tfrac{d+5}{2}\right)+\tfrac{d(d+2)}{16}2^{-d/2}2^{\frac{d+3}{2}}\Gamma\left(\tfrac{d+3}{2}\right)\Big\}\Big]$$

$$= \frac{d+2}{4d}\sqrt{2}\Big[2^{\frac{1-2}{2}}\frac{d}{2}+\tfrac{1}{4}2^{3/2}\frac{d+1}{2}+a_2\Big\{2^{\frac{1-6}{2}}\frac{d+4}{2}\frac{d+2}{2}\frac{d}{2}+\frac{3d+4}{16d}2^{\frac{5-2}{2}}\frac{d}{2}\frac{d+3}{2}\frac{d+1}{2}+\frac{3d+4}{4d}2^{\frac{3-4}{2}}\frac{d+2}{2}\frac{d}{2}\frac{d+1}{2}$$
$$-(d+2)2^{\frac{1-4}{2}}\frac{d+2}{2}\frac{d}{2}-\frac{d+2}{2}2^{\frac{3-2}{2}}\frac{d}{2}\frac{d+1}{2}+\frac{d(d+2)}{4}2^{\frac{1-2}{2}}\frac{d}{2}$$
$$+\tfrac{1}{64}2^{7/2}\frac{d+5}{2}\frac{d+3}{2}\frac{d+1}{2}-\frac{d+2}{16}2^{5/2}\frac{d+3}{2}\frac{d+1}{2}+\frac{d(d+2)}{16}2^{3/2}\frac{d+1}{2}\Big\}\Big]$$

$$= \frac{d+2}{4d}\Big[\frac{d}{2}+\frac{d+1}{2}+a_2\Big\{\underbrace{2^{-4/2}}_{=2^{-2}=\frac14}\frac{d(d+2)(d+4)}{8}+\frac{3d+4}{16d}\underbrace{2^{4/2}}_{=4}\frac{(d+3)(d+1)d}{8}+\frac{3d+4}{4d}\frac{d(d+2)(d+1)}{8}-2^{-2/2}\frac{d(d+2)^2}{4}-\underbrace{2^{2/2}}_{=2}\frac{(d+2)(d+1)d}{8}$$
$$+2^0\frac{(d+2)d^2}{8}+\frac{\overset{=16}{2^4}}{64}\frac{(d+5)(d+3)(d+1)}{8}-\underbrace{2^{6/2}}_{=8}\frac{(d+3)(d+2)(d+1)}{64}+\underbrace{2^{4/2}}_{=4}\frac{(d+2)(d+1)d}{32}\Big\}\Big]$$

$$= \frac{d+2}{4d}\Big[d+\tfrac12+a_2\Big\{\tfrac{1}{32}d(d+2)(d+4)+\frac{3d+4}{32}(d+3)(d+1)+\frac{(d+2)(3d+4)(d+1)}{2\cdot16}-\frac{d(d+2)^2}{8}-\frac{d(d+1)(d+2)}{4}+\frac{d^2(d+2)}{8}+\frac{(d+1)(d+3)(d+5)}{32}$$
$$-\frac{(d+1)(d+2)(d+3)}{8}+\frac{d(d+1)(d+2)}{8}\Big\}\Big]$$

$$= \frac{d+2}{4d}\Big[d+\tfrac12+\frac{a_2}{32}\Big\{d(d+2)(d+4)+(d+1)(d+3)(3d+4)+(d+2)(3d+4)(d+1)-4d(d+2)^2-8d(d+1)(d+2)+4d^2(d+2)+(d+1)(d+3)(d+5)$$
$$-4(d+1)(d+2)(d+3)+4d(d+1)(d+2)\Big\}\Big]$$

$$= \frac{d+2}{4d}\Big[d+\tfrac12+\frac{a_2}{32}\Big\{d(d+2)\left[d+4-4(d+2)+4d\right]+(3d+4)(d+1)(\underbrace{d+3+d+2}_{=2d+5})-4d(d+1)(d+2)+(d+1)(d+3)\left[d+5-4(d+2)\right]\Big\}\Big]$$

$$= \frac{d+2}{4d}\Big[d+\tfrac12+\frac{a_2}{32}\Big\{d(d+2)(d-4)+(3d+4)\overbrace{\left[2d^2+5d+2d+5\right]}^{=2d^2+7d+5}-4d(d+1)(d+2)+(d+1)(d+3)\left[-3d-3\right]\Big\}\Big]$$

$$= \frac{d+2}{4d}\Big[d+\tfrac12+\frac{a_2}{32}\Big\{(d^2+2d)(d-4)+(3d+4)(2d^2+7d+5)-4(d^2+d)(d+2)-3(d+1)^2(d+3)\Big\}\Big]$$

$$= \frac{d+2}{4d}\Big[d+\tfrac12+\frac{a_2}{32}\Big\{d^3-4d^2+2d^2-8d+6d^3+21d^2+15d+8d^2+28d+20-4d^3-8d^2-4d^2-8d-3(d^2+2d+1)(d+3)\Big\}\Big]$$

$$= -3(d^3+3d^2+2d^2+6d+d+3)$$

$$= \frac{d+2}{4d}\Big[d+\tfrac12+\frac{a_2}{32}\Big\{3d^3+15d^2+27d+20-3d^3-15d^2-21d-9\Big\}\Big]$$

$$= \frac{d+2}{4d}\Big[d+\tfrac12+\frac{a_2}{32}\Big\{6d+11\Big\}\Big] \qquad (3)$$

Het-ensemble : (2) et (3) dans (1) donne :

$$\varsigma_T^{(0)*} = \frac{d+2}{8d}\left[2d+1+\frac{a_2}{16}(6d+11)\right] - \frac{d+2}{8d}\left[2d - \frac{a_2}{16}2d\right]$$

$$= \frac{d+2}{8d}\left[\cancel{2d}+1-\cancel{2d}+\frac{a_2}{16}(6d+11+2d)\right]$$

$$\boxed{\varsigma_T^{(0)*} = \frac{d+2}{8d}\left[1+\frac{11+8d}{16}a_2\right]}$$

Vérification de $\mathcal{V}_\eta^{*a}$

On ne vérifie que l'annihilation : les deux termes. Commençons par le premier.

$$\mathcal{V}_\eta^{*} = \frac{\beta^2}{(d+2)(d-1)nV_0}\left[p\int_{\mathbb{R}^d} dv\, D_{ij}(v)\, L_a[\mathcal{M}D_{ij}] + (1-p)\int_{\mathbb{R}^d} dv\, D_{ij}(v)\, L_c[\mathcal{M}D_{ij}] - p\int_{\mathbb{R}^d} dv\, D_{ij}(v)\, \Omega[\mathcal{M}D_{ij}]\right]$$

(premier terme) vérifions d'abord ce terme : $p\,\mathcal{V}_\eta^{*a}$ — (deuxième terme) Ok, ce terme est déjà calculé dans la littérature — (troisième terme) terme additionnel

$$\mathcal{V}_\eta^{*a} = \frac{\beta^2}{(d+2)(d-1)nV_0}\int_{\mathbb{R}^d} dv\, D_{ij}(v)\, L_a[\mathcal{M}D_{ij}]$$

lemme 3.3

$$= \frac{\beta^2}{(d+2)(d-1)nV_0}\sigma^{d-1}\beta_1\int_{\mathbb{R}^{2d}} dv_1 dv_2\, |v_{12}|\, f^{(0)}(v_1)\mathcal{M}(v_2) D_{ij}(v_2)\left[D_{ij}(v_1)+D_{ij}(v_2)\right]$$

$$= \frac{\beta^2}{(d+2)(d-1)nV_0}\sigma^{d-1}\beta_1\int_{\mathbb{R}^{2d}} dv_1 dv_2\, |v_{12}|\, \frac{n}{v_T^d}\frac{1}{\pi^{d/2}}e^{-v_1^2/v_T^2}\left[1+a_2 S_2\left(\frac{v_1^2}{v_T^2}\right)\right]\frac{n}{v_T^d}\frac{1}{\pi^{d/2}}e^{-v_2^2/v_T^2} D_{ij}(v_2)\left[D_{ij}(v_1)+D_{ij}(v_2)\right]$$

$$= \frac{\beta^2}{(d+2)(d-1)nV_0}\sigma^{d-1}\beta_1\frac{n^2}{v_T^{2d}}\frac{1}{\pi^d}\int_{\mathbb{R}^{2d}} dv_1 dv_2\, |v_{12}|\, e^{-v_1^2/v_T^2}e^{-v_2^2/v_T^2}\left[1+a_2 S_2\left(\frac{v_1^2}{v_T^2}\right)\right] m^2\left(V_{2i}V_{2j}-\frac{1}{d}V_2^2\delta_{ij}\right)\left[V_{1i}V_{1j}-\frac{V_1^2}{d}\delta_{ij}+V_{2i}V_{2j}-\frac{V_2^2}{d}\delta_{ij}\right]$$

$$= \frac{\beta^2\sigma^{d-1}\cancel{n^2}m^2\beta_1}{(d+2)(d-1)\cancel{n}V_0 \cancel{v_T^{2d}}\pi^d}\int_{\mathbb{R}^{2d}} dc_1 dc_2\, |c_{12}|\, v_T \cancel{v_T^{2d}}\, e^{-c_1^2}e^{-c_2^2}\left[1+a_2S_2(c_1^2)\right] v_T^2 v_T^2\left(c_{2i}c_{2j}-\frac{c_2^2}{d}\delta_{ij}\right)\left[c_{1i}c_{1j}-\frac{c_1^2}{d}\delta_{ij}+c_{2i}c_{2j}-\frac{c_2^2}{d}\delta_{ij}\right]$$

$$= \frac{\beta^2\sigma^{d-1}n m^2\beta_1 v_T^5}{(d+2)(d-1)V_0\pi^d}\int_{\mathbb{R}^{2d}} dc_1 dc_2\, |c_{12}|\, e^{-c_1^2}e^{-c_2^2}\left[1+a_2S_2(c_1^2)\right]\left(c_{2i}c_{2j}-\frac{c_2^2}{d}\delta_{ij}\right)\left[c_{1i}c_{1j}-\frac{c_1^2}{d}\delta_{ij}+c_{2i}c_{2j}-\frac{c_2^2}{d}\delta_{ij}\right]$$

avec :

$$\left(c_{2i}c_{2j}-\frac{c_2^2}{d}\delta_{ij}\right)\left[c_{1i}c_{1j}-\frac{c_1^2}{d}\delta_{ij}+c_{2i}c_{2j}-\frac{c_2^2}{d}\delta_{ij}\right] = c_{2i}c_{2j}c_{1i}c_{1j}+c_{2i}c_{2j}c_{2i}c_{2j}-c_{2i}c_{2j}\frac{c_1^2}{d}\delta_{ij}-c_{2i}c_{2j}\frac{c_2^2}{d}\delta_{ij}$$
$$-\frac{c_2^2}{d}\delta_{ij}c_{1i}c_{1j}-\frac{c_2^2}{d}\delta_{ij}c_{2i}c_{2j}+\frac{c_1^2c_2^2}{d^2}\delta_{ij}\delta_{ij}+\frac{c_2^4}{d^2}\delta_{ij}\delta_{ij}$$
$$= (c_1\cdot c_2)^2 + c_2^4 - \frac{1}{d}c_1^2c_2^2 - \frac{1}{d}c_2^4 - \frac{1}{d}c_1^2c_2^2 - \frac{1}{d}c_2^4 + \frac{1}{d^2}c_1^2c_2^2\underbrace{\sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d}\delta_{ij}}_{=d} + \frac{1}{d^2}c_2^4 d$$
$$= (c_1\cdot c_2)^2 + c_2^4\left(1-\frac{2}{d}+\frac{1}{d}\right) + c_1^2c_2^2\left(-\frac{2}{d}+\frac{1}{d}\right)$$
$$= (c_1\cdot c_2)^2 + \frac{d-1}{d}c_2^4 - \frac{1}{d}c_1^2c_2^2$$

$$\Rightarrow \mathcal{V}_\eta^{*a} = \frac{\beta^2\sigma^{d-1}nm^2\beta_1v_T^5}{(d+2)(d-1)V_0\pi^d}\frac{1}{d}\int_{\mathbb{R}^{2d}} dc_1dc_2\,|c_{12}|\,e^{-c_1^2}e^{-c_2^2}\left[1+a_2S_2(c_1^2)\right]\left[d(c_1\cdot c_2)^2+(d-1)c_2^4-c_1^2c_2^2\right]$$

$$= \frac{\beta^2\sigma^{d-1}nm^2\beta_1v_T^5}{d(d+2)(d-1)V_0\pi^d}\int_{\mathbb{R}^{2d}} dc_1dc_2\,|c_{12}|\,e^{-c_1^2}e^{-c_2^2}\underbrace{\left[1+a_2\left(\frac{1}{2}c_1^4-\frac{d+2}{2}c_1^2+\frac{d(d+2)}{8}\right)\right]}_{=1+Ac_1^4+Bc_1^2+D}\left[d(c_1\cdot c_2)^2+(d-1)c_2^4-c_1^2c_2^2\right]$$

$A = \frac{1}{2}a_2$

$B = -\frac{d+2}{2}a_2 = -(d+2)A$

$D = a_2\frac{d(d+2)}{8} = -\frac{d}{4}\left(-\frac{d+2}{2}a_2\right) = -\frac{d}{4}B = \frac{d(d+2)}{4}A$

$$= \frac{\beta^2\sigma^{d-1}nm^2\beta_1v_T^5}{d(d+2)(d-1)V_0\pi^d}\int_{\mathbb{R}^d} dc_1dc_2\,|c_{12}|\,e^{-c_1^2}e^{-c_2^2}\left(1+Ac_1^4+Bc_1^2+D\right)\left[d(c_1\cdot c_2)^2+(d-1)c_2^4-c_1^2c_2^2\right]$$

$$= \frac{\beta^2\sigma^{d-1}nm^2\beta_1v_T^5}{d(d+2)(d-1)V_0\pi^d}\int_{\mathbb{R}^d} dc_1dc_2\,|c_{12}|\,e^{-c_1^2}e^{-c_2^2}\Big[(1+D)d(c_1\cdot c_2)^2+(1+D)(d-1)c_2^4-(1+D)c_1^2c_2^2+Adc_1^4(c_1\cdot c_2)^2+A(d-1)c_1^4c_2^4$$
$$-Ac_1^6c_2^2+Bdc_1^2(c_1\cdot c_2)^2+\underline{B(d-1)c_1^2c_2^4-Bc_1^4c_2^2}\Big]$$

$$= \frac{\beta^2\sigma^{d-1}nm^2\beta_1v_T^5}{d(d+2)(d-1)V_0\pi^d}\int_{\mathbb{R}^d} dc_1dc_2\,|c_{12}|\,e^{-c_1^2}e^{-c_2^2}\Big[(1+D)d(c_1\cdot c_2)^2+(1+D)(d-1)c_2^4-(1+D)c_1^2c_2^2+Adc_1^4(c_1\cdot c_2)^2+A(d-1)c_1^4c_2^4$$
$$-Ac_1^6c_2^2+Bdc_1^2(c_1\cdot c_2)^2+B(d-2)c_1^2c_2^4\Big] \qquad (*)$$

Coordonnées du centre de masse et relative :

$$\left.\begin{aligned} c_{12} &= c_1-c_2 \\ C &= \tfrac{1}{2}(c_1+c_2)\end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} c_1 &= c_{12}+c_2 \\ C &= \tfrac{1}{2}(c_{12}+2c_2) = c_2+\tfrac{1}{2}c_{12}\end{aligned} \begin{aligned} &\Rightarrow c_1 = c_{12}+C-\tfrac{1}{2}c_{12} \\ &\Rightarrow c_2 = C-\tfrac{1}{2}c_{12}\end{aligned} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} c_1 &= C+\tfrac{1}{2}c_{12} \\ c_2 &= C-\tfrac{1}{2}c_{12}\end{aligned}\right.$$

$$c_1^2+c_2^2 = C^2+\frac{1}{4}c_{12}^2+(C\cdot c_{12})+C^2+\frac{1}{4}c_{12}^2-(C\cdot c_{12}) = 2C^2+\frac{1}{2}c_{12}^2$$

$$(C_1\cdot C_2)^2 = \left[(c+\tfrac12 C_{12})\cdot(c-\tfrac12 C_{12})\right]^2 = \left(c^2-\tfrac14 C_{12}^2\right)^2$$

$$C_2^4 = \left(c-\tfrac12 C_{12}\right)^4 = \left(c^2+\tfrac14 C_{12}^2-(c\cdot C_{12})\right)^2$$

$$= \left(c^2+\tfrac14 C_{12}^2\right)^2 + \underbrace{(c\cdot C_{12})^2}_{\frac1d c^2C_{12}^2} - 2\,\overset{\to 0}{(c\cdot C_{12})}\left(c^2+\tfrac14 C_{12}^2\right)$$

$$C_1^2C_2^2 = \left[c^2+\tfrac14 C_{12}^2+(c\cdot C_{12})\right]\left[c^2+\tfrac14 C_{12}^2-(c\cdot C_{12})\right]$$

$$= \left(c^2+\tfrac14 C_{12}^2\right)^2 - (c\cdot C_{12})\left(c^2+\tfrac14 C_{12}^2\right) + (c\cdot C_{12})\left(c^2+\tfrac14 C_{12}^2\right) - (c\cdot C_{12})^2$$

$$= \left(c^2+\tfrac14 C_{12}^2\right)^2 - \underbrace{(c\cdot C_{12})^2}_{\frac1d c^2C_{12}^2}$$

$$C_1^4(C_1\cdot C_2)^2 = \left(c+\tfrac12 C_{12}\right)^4\left(c^2-\tfrac14 C_{12}^2\right)^2$$

$$= \left(c^2+\tfrac14 C_{12}^2+(c\cdot C_{12})\right)^2\left(c^2-\tfrac14 C_{12}^2\right)^2$$

$$= \left[\left(c^2+\tfrac14 C_{12}^2\right)^2 + (c\cdot C_{12})^2 + 2(c\cdot C_{12})\left(c^2+\tfrac14 C_{12}^2\right)\right]\left(c^2-\tfrac14 C_{12}^2\right)^2$$

$$= \left[\left(c^2+\tfrac14 C_{12}^2\right)^2 + \underbrace{(c\cdot C_{12})^2}_{\frac1d c^2C_{12}^2}\right]\left(c^2-\tfrac14 C_{12}^2\right)^2 + 2\,\overset{\to 0}{(c\cdot C_{12})}\left(c^2+\tfrac14 C_{12}^2\right)\left(c^2-\tfrac14 C_{12}^2\right)^2$$

$$C_1^4C_2^4 = \left[\left(c^2+\tfrac14 C_{12}^2\right)^2+(c\cdot C_{12})^2+2(c\cdot C_{12})\left(c^2+\tfrac14 C_{12}^2\right)\right]\left[\left(c^2+\tfrac14 C_{12}^2\right)^2+(c\cdot C_{12})^2-2(c\cdot C_{12})\left(c^2+\tfrac14 C_{12}^2\right)\right]$$

$$= \left[\left(c^2+\tfrac14 C_{12}^2\right)^2+(c\cdot C_{12})^2\right]^2 - 2(c\cdot C_{12})\left(c^2+\tfrac14 C_{12}^2\right)\left[\left(c^2+\tfrac14 C_{12}^2\right)^2+(c\cdot C_{12})^2\right]$$
$$+ 2(c\cdot C_{12})\left(c^2+\tfrac14 C_{12}^2\right)\left[\left(c^2+\tfrac14 C_{12}^2\right)^2+(c\cdot C_{12})^2\right]$$
$$-4(c\cdot C_{12})^2\left(c^2+\tfrac14 C_{12}^2\right)^2$$

$$= \left(c^2+\tfrac14 C_{12}^2\right)^4 + (c\cdot C_{12})^4 + 2(c\cdot C_{12})^2\left(c^2+\tfrac14 C_{12}^2\right)^2 - 4(c\cdot C_{12})^2\left(c^2+1/4\, C_{12}^2\right)^2$$

$$= \left(c^2+\tfrac14 C_{12}^2\right)^4 + (c\cdot C_{12})^4 - 2\underbrace{(c\cdot C_{12})^2}_{\frac1d c^2C_{12}^2}\left(c^2+\tfrac14 C_{12}^2\right)^2$$

$$C_1^6C_2^2 = \left(c+\tfrac12 C_{12}\right)^2\left(c+\tfrac12 C_{12}\right)^4\left(c-\tfrac12 C_{12}\right)^2$$

$$= \left[c^2+\tfrac14 C_{12}^2+(c\cdot C_{12})\right]\left[\left(c^2+\tfrac14 C_{12}^2\right)^2+(c\cdot C_{12})^2+2(c\cdot C_{12})\left(c^2+\tfrac14 C_{12}^2\right)\right]\left[c^2+\tfrac14 C_{12}^2-(c\cdot C_{12})\right]$$

$$= \left[\left(c^2+\tfrac14 C_{12}^2\right)^2-(c\cdot C_{12})\left(c^2+\tfrac14 C_{12}^2\right)+(c\cdot C_{12})\left(c^2+\tfrac14 C_{12}^2\right)-(c\cdot C_{12})^2\right]\left[\left(c^2+\tfrac14 C_{12}^2\right)^2+(c\cdot C_{12})^2+2(c\cdot C_{12})\left(c^2+\tfrac14 C_{12}^2\right)\right]$$

$$= \left[\left(c^2+\tfrac14 C_{12}^2\right)^2-(c\cdot C_{12})^2\right]\left[\left(c^2+\tfrac14 C_{12}^2\right)^2+(c\cdot C_{12})^2+2(c\cdot C_{12})\left(c^2+\tfrac14 C_{12}^2\right)\right]$$

$$= \left(c^2+\tfrac14 C_{12}^2\right)^4 + (c\cdot C_{12})^2\left(c^2+\tfrac14 C_{12}^2\right)^2 + 2(c\cdot C_{12})\left(c^2+\tfrac14 C_{12}^2\right)^3 - (c\cdot C_{12})^2\left(c^2+\tfrac14 C_{12}^2\right)^2 - (c\cdot C_{12})^4$$
$$- 2(c\cdot C_{12})^3\left(c^2+\tfrac14 C_{12}^2\right)$$

$$= \left(c^2+\tfrac14 C_{12}^2\right)^4 - (c\cdot C_{12})^4 + 2\,\overset{\to 0}{(c\cdot C_{12})}\left(c^2+\tfrac14 C_{12}^2\right)^3 - 2\,\overset{\to 0}{(c\cdot C_{12})^3}\left(c^2+\tfrac14 C_{12}^2\right)$$

$$C_1^2(c\cdot C_{12})^2 = \left(c+\tfrac12 C_{12}\right)^2\left(c^2-\tfrac14 C_{12}^2\right)^2$$

$$= \left(c^2+\tfrac14 C_{12}^2+(c\cdot C_{12})\right)\left(c^2-\tfrac14 C_{12}^2\right)^2$$

$$= \left(c^2+\tfrac14 C_{12}^2\right)\left(c^2-\tfrac14 C_{12}^2\right)^2 + \overset{\to 0}{(c\cdot C_{12})}\left(c^2-\tfrac14 C_{12}^2\right)^2$$

$$C_1^2C_2^4 = \left(c+\tfrac12 C_{12}\right)^2\left[\left(c^2+\tfrac14 C_{12}^2\right)^2+(c\cdot C_{12})^2-2(c\cdot C_{12})\left(c^2+\tfrac14 C_{12}^2\right)\right]$$

$$= \left[c^2+\tfrac14 C_{12}^2+(c\cdot C_{12})\right]\left[\left(c^2+\tfrac14 C_{12}^2\right)^2+(c\cdot C_{12})^2-2(c\cdot C_{12})\left(c^2+\tfrac14 C_{12}^2\right)\right]$$

$$= \left(c^2+\tfrac14 C_{12}^2\right)^3 + \left(c^2+\tfrac14 C_{12}^2\right)(c\cdot C_{12})^2 - 2(c\cdot C_{12})\left(c^2+\tfrac14 C_{12}^2\right)^2 + (c\cdot C_{12})\left(c^2+\tfrac14 C_{12}^2\right)^2 + (c\cdot C_{12})^3$$
$$- 2(c\cdot C_{12})^2\left(c^2+\tfrac14 C_{12}^2\right)$$

$$= \left(c^2+\tfrac14 C_{12}^2\right)^3 - \underbrace{(c\cdot C_{12})^2}_{\frac1d c^2C_{12}^2}\left(c^2+\tfrac14 C_{12}^2\right) - \overset{\to 0}{(c\cdot C_{12})}\left(c^2+\tfrac14 C_{12}^2\right)^2 + \overset{\to 0}{(c\cdot C_{12})^3}$$

Ces moments sont intégrés avec un poids symétrique, donc toutes les puissances impaires de $(c\cdot C_{12})$ donnent une contrib. nulle par antisymétrie. De plus par isotropie (et comme les moments impaires seront de contribution nulle):

$$(c\cdot C_{12})^2 = \frac1d c^2 C_{12}^2$$

Que vaut $(c\cdot C_{12})^4$? Sépare en parties symétriques et antisymétriques :

$$(x\cdot y)^4 = \sum_{ijkl=1}^{d} x_i x_j x_k x_l y_i y_j y_k y_l$$

$$= \underbrace{\sum_{ijkl=1}^{d} x_i x_j x_k x_l y_i y_j y_k y_l \, \delta_{ijkl}}_{\text{termes d'ordre 4 en } x_i \text{ et } y_i} + \underbrace{\begin{aligned} &\sum_{ijkl=1}^{d} x_i x_j x_k x_l y_i y_j y_k y_l \, (1-\delta_{ijkl}) \cdot \delta_{ij}\delta_{kl} \\ &+ \sum_{ijkl=1}^{d} x_i x_j x_k x_l y_i y_j y_k y_l \, (1-\delta_{ijkl}) \, \delta_{ik}\delta_{jl} \\ &+ \sum_{ijkl=1}^{d} x_i x_j x_k x_l y_i y_j y_k y_l \, (1-\delta_{ijkl}) \, \delta_{il}\delta_{jk} \end{aligned}}_{\text{termes d'ordre 2 en } x_i \text{ et } y_i}$$

+ termes impairs (contribution nulle à l'intégrale)

$$= \sum_{ijk=1}^{d} x_i x_j x_k y_i y_j y_k \underbrace{\sum_{l=1}^{d} x_l y_l \, \delta_{ij}\delta_{kl}\delta_{ik}}_{= x_k y_k \delta_{ij}\delta_{ik}} + \sum_{ijkl=1}^{d} x_i x_j x_k x_l y_i y_j y_k y_l \left(\delta_{ij}\delta_{kl} - \delta_{ij}\delta_{kl}\delta_{ik}\delta_{ij}\delta_{kl}\right)$$

$$+ \sum_{ijkl=1}^{d} x_i x_j x_k x_l y_i y_j y_k y_l \left(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{ij}\delta_{kl}\delta_{ik}\delta_{ik}\delta_{jl}\right)$$

$$+ \sum_{ijkl=1}^{d} x_i x_j x_k x_l y_i y_j y_k y_l \left(\delta_{il}\delta_{jk} - \delta_{ij}\delta_{kl}\delta_{ik}\delta_{il}\delta_{jk}\right)$$

$$= \sum_{ij=1}^{d} x_i x_j \delta_{ij} y_i y_i \underbrace{\sum_{k=1}^{d} x_k^2 y_k^2 \delta_{ik}}_{= x_i^2 y_i^3} + \sum_{ijkl=1}^{d} x_i x_j x_k x_l y_i y_j y_k y_l \, \delta_{ij}\delta_{kl}$$

$$- \sum_{ijkl=1}^{d} x_i x_j x_k x_l y_i y_j y_k y_l \, \delta_{ij}\delta_{kl}\delta_{ik}$$

$$+ \sum_{ijkl=1}^{d} x_i x_j x_k x_l y_i y_j y_k y_l \, \delta_{ik}\delta_{jl}$$

$$- \sum_{ijkl=1}^{d} x_i x_j x_k x_l y_i y_j y_k y_l \, \delta_{ij}\delta_{kl} \, \delta_{ik}\delta_{jl}$$

$$+ \sum_{ijkl=1}^{d} x_i x_j x_k x_l y_i y_j y_k y_l \, \delta_{il}\delta_{jk}$$

$$- \sum_{ijkl=1}^{d} x_i x_j x_k x_l y_i y_j y_k y_l \, \delta_{ij}\delta_{kl} \, \delta_{ik}\delta_{il}\delta_{jk}$$

$$= \sum_{i=1}^{d} x_i^3 y_i^3 \underbrace{\sum_{j=1}^{d} x_j y_j \delta_{ij}}_{= x_i y_i} + \sum_{ijk=1}^{d} x_i x_j x_k^2 y_i y_j y_k^2 \, \delta_{ij}$$

$$- \sum_{ijk=1}^{d} x_i x_j x_k^2 y_i y_j y_k^2 \, \delta_{ij}\delta_{ik}$$

$$+ \sum_{ijk=1}^{d} x_i x_j^2 x_k y_i y_j^2 y_k \, \delta_{ik}$$

$$- \sum_{ijk=1}^{d} x_i x_j x_k^2 y_i y_j y_k^2 \, \delta_{ij}\delta_{ik}\delta_{kj}$$

$$+ \sum_{ijk=1}^{d} x_i^2 x_j x_k y_i^2 y_j y_k \, \delta_{jk}$$

$$- \sum_{ijk=1}^{d} x_i x_j x_k^2 y_i y_j y_k^2 \, \delta_{ij} \, \delta_{ki}\delta_{ik}\delta_{jk}$$

$$= \sum_{i=1}^{d} x_i^4 y_i^4 + \sum_{ik=1}^{d} X_i^2 Y_i^2 Y_k^2 X_k^2 - \sum_{ij=1}^{d} x_i^3 y_i^3 x_j y_j \delta_{ij}$$

$$+ \sum_{ij=1}^{d} x_i^2 y_i^2 x_j^2 y_j^2 - \sum_{ij=1}^{d} x_i^3 y_i^3 x_j y_j \delta_{ij}$$

$$+ \sum_{ij=1}^{d} x_i^2 y_i^2 x_j^2 y_j^2 - \sum_{ij=1}^{d} x_i y_i x_j^3 y_j^3 \delta_{ij}$$

$$= \sum_{i=1}^{d} x_i^4 y_i^4 + 3 \sum_{ij=1}^{d} x_i^2 y_i^2 x_j^2 y_j^2 - 3 \sum_{i=1}^{d} x_i^4 y_i^4$$

$$= -2 \sum_{i=1}^{d} x_i^4 y_i^4 + 3 \sum_{ij=1}^{d} x_i^2 y_i^2 x_j^2 y_j^2$$

$$= -2 \sum_{i=1}^{d} x_i^4 y_i^4 + 3 \left(\sum_{i=1}^{d} x_i^2 y_i^2 \right) \left(\sum_{j=1}^{d} x_j^2 y_j^2 \right)$$

$$= -2 \sum_{i=1}^{d} x_i^4 y_i^4 + 3 \Big(\underbrace{\sum_{i=1}^{d} x_i^2 y_i^2}_{\overset{\text{isotropie}}{=} \frac{1}{d} x^2 y^2} \Big)^2$$

$$= \frac{3}{d^2} x^4 y^4 - 2 \underbrace{\sum_{i=1}^{d} x_i^4 y_i^4}$$

isotropie : $\int dx\, dy\, F(x) G(y) \sum_{i=1}^{d} x_i^4 y_i^4 = \sum_{i=1}^{d} \int dx\, dy\, F(x) G(y)\, x_i^4 y_i^4$

$$= \sum_{i=1}^{d} \left(\int dx\, F(x)\, x_i^4 \right) \left(\int dy\, G(y)\, y_i^4 \right)$$

Soit une matrice de rotation $x \mapsto R(x)$ t.q. $x_i \to x_j$, alors :

$$\Big(\underbrace{\int dRx\, F(Rx)}_{= \int dx F(x)} x_j^4 \Big) \Big(\underbrace{\int dRy\, G(Ry)}_{= \int dy G(y)} y_j^4 \Big) = \left(\int dx\, F(x)\, x_i \right) \left(\int dy\, G(y)\, y_i \right) \quad \forall ij$$

$\Longrightarrow$ on peut prendre un indice fixé

$$= \frac{3}{d^2} x^4 y^4 - 2 \sum_{i=1}^{d} x_j^4 y_j^4$$

$$= \frac{3}{d^2} x^4 y^4 - 2d\, x_j^4\, y_j^4$$

Conclusion :

$$\left.\begin{aligned}
&(c_1 \cdot c_2)^2 = \left(c^2 - \tfrac{1}{4} c_{12}^2\right)^2 \\
&c_2^4 = \left(c^2 + \tfrac{1}{4} c_{12}^2\right)^2 + \tfrac{1}{d} c^2 c_{12}^2 \\
&c_1^2 c_2^2 = \left(c^2 + \tfrac{1}{4} c_{12}^2\right)^2 - \tfrac{1}{d} c^2 c_{12}^2 \\
&\cdot\ c_1^4 (c \cdot c_{12})^2 = \left[\left(c^2 + \tfrac{1}{4} c_{12}^2\right)^2 + \tfrac{1}{d} c^2 c_{12}^2\right] \left(c^2 - \tfrac{1}{4} c_{12}^2\right)^2 \\
&\cdot\ c_1^4 c_2^4 = \left(c^2 + \tfrac{1}{4} c_{12}^2\right)^4 + \tfrac{3}{d^2} c^4 c_{12}^4 - 2d\, c_j^4 c_{12j}^4 - 2 \tfrac{1}{d} c^2 c_{12}^2 \left(c^2 + \tfrac{1}{4} c_{12}^2\right)^2 \\
&\cdot\ c_1^6 c_2^2 = \left(c^2 + \tfrac{1}{4} c_{12}^2\right)^4 - \tfrac{3}{d^2} c^4 c_{12}^4 + 2d\, c_i^4 c_{12i}^4 \\
&c_1^2 (c \cdot c_{12})^2 = \left(c^2 + \tfrac{1}{4} c_{12}^2\right) \left(c^2 - \tfrac{1}{4} c_{12}^2\right)^2 \\
&c_1^2 c_2^4 = \left(c^2 + \tfrac{1}{4} c_{12}^2\right)^3 - \tfrac{1}{d} c^2 c_{12}^2 \left(c^2 + \tfrac{1}{4} c_{12}^2\right)
\end{aligned}\right\} \quad (**)$$

Insère (**) dans (*), et obtient :

$$\nu_\eta^{*a} = \frac{\beta^3 \sigma^{d-1} n m^2 \beta_1 v_T^5}{d(d+2)(d-1) v_0 \pi^d} \int_{\mathbb{R}^{2d}} dc\, dc_{12}\, e^{-2c^2 - \frac{1}{2} c_{12}^2}\, \tilde{H}(\underline{c}, \underline{c}_{12})\, |c_{12}|$$

avec

$$\tilde{H}(\underline{c}, \underline{c}_{12}) = \sum_{ij \in \Omega_\alpha} \alpha_{ij}\, c^i c_{12}^j + \sum_{ij \in \Omega_\gamma} \gamma_{ij}\, c^i c_{12}^j\, c_1^4 c_{12,1}^4$$

le développement des polynômes. Aussi :

$$\nu_\eta^{*a} = \frac{\beta^2 \sigma^{d+1} n m^2 \beta_1 V_T^2}{d(d+2)(d-1) \nu_0 \pi^d} H(a_2, d)$$

$$H(a_2,d) = \sum_{ij \in \Omega_\alpha} \alpha_{ij} \left(\int_{\mathbb{R}^d} dc\, e^{-2c^2} c^i \right) \left(\int_{\mathbb{R}^d} dc_{12}\, e^{-c_{12}^2/2} c_{12}^{j+1} \right) + \sum_{ij \in \Omega_\gamma} \gamma_{ij} \left(\int_{\mathbb{R}^d} dc\, e^{-2c^2} c^i c_1^4 \right) \left(\int_{\mathbb{R}^d} dc_{12}\, e^{-c_{12}^2/2} c_{12}^{j+1} c_{12,1}^4 \right)$$

avec :

$$I^a[n] = \int_{\mathbb{R}^d} dx\, |x|^n e^{-ax^2}$$

$$M^a_{ijkl}[n] = \int_{\mathbb{R}^d} dx\, |x|^n e^{-ax^2} x_i x_j x_k x_l$$

alors :

$$H(a_2,d) = \sum_{ij \in \Omega_\alpha} \alpha_{ij} I^2[i] I^{1/2}[j+1] + \sum_{ij \in \Omega_\gamma} \gamma_{ij} M^2_{1111}[i] M^{1/2}_{1111}[j+1]$$

Reste à faire : trouver $\boxed{\Omega_\alpha}$, $\boxed{\Omega_\gamma}$, $\boxed{I^a[n]}$, $\boxed{M^a_{ijkl}[n]}$, $\boxed{\alpha_{ij}}$, $\boxed{\gamma_{ij}}$. On peut facilement trouver γ_{ij} et Ω_γ : ces termes apparaissent dans $C_1^4 C_2^4$ et $C_1^6 C_2^2$, avec coefficients $A(d-1)$ et $-A$ respectivement. Ainsi il y aura les termes :

$$A(d-1)\left[-2d\, C_j^4 C_{12j}^4\right] - A\left[+2d\, C_j^4 C_{12j}^4\right] = 2d\, C_j^4 C_{12j}^4 (\cancel{A} - dA \cancel{+A}) = -2d^2 A\, C_j^4 C_{12j}^4 \quad , A = \tfrac{1}{2} a_2$$

$$\Rightarrow \boxed{\Omega_\gamma = \{(0,0)\}} \qquad \boxed{\gamma_{0,0} = -d^2 a_2} \;\checkmark$$

$$\boxed{I^a[n] = \frac{\pi^{d/2}}{a^{(d+n)/2}} \frac{\Gamma\left(\frac{d+n}{2}\right)}{\Gamma(d/2)}}$$

Pour $M^a_{ijkl}[n]$, on n'étudie ici que le cas particulier $M^a_{iiii}[n]$

$$M^a_{iiii}[n] = \int_{\mathbb{R}^d} dx\, |x|^n x_i^4 e^{-ax^2}$$

$$\overset{\text{isotropie}}{=} \int_{\mathbb{R}^d} dx\, |x|^n x_1^4\, e^{-ax^2} \quad ; x_1 = r \sin\theta_1 \cdots \sin\theta_{d-2} \cos\varphi$$

$$= \int_0^\infty dr\, r^n e^{-ar^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta_1 \cdots \int_0^\pi d\theta_{d-2}\; r^4 \cos\varphi^4 \left(\prod_{k=1}^{d-2} \sin\theta_k^4 \right) r^{d-1} \left(\prod_{k=1}^{d-2} (\sin\theta_k)^k \right)$$

$$= \underbrace{\int_0^\infty dr\, r^{n+d+3} e^{-ar^2}}_{= \frac{1}{2} \frac{1}{a^{\frac{d+n+4}{2}}} \Gamma\left(\frac{d+n+4}{2}\right)} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi \cos\varphi^4}_{= \frac{3\pi}{4}} \prod_{k=1}^{d-2} \underbrace{\int_0^\pi d\theta (\sin\theta)^{k+4}}_{= \sqrt{\pi} \frac{\Gamma\left(\frac{k+5}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+6}{2}\right)}}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{a^{\frac{d+n+4}{2}}} \Gamma\left(\frac{d+n+4}{2}\right) \frac{3\pi}{4} \pi^{\frac{d-2}{2}} \prod_{k=1}^{d-2} \frac{\Gamma\left(\frac{k+5}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+6}{2}\right)}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{3\pi}{4} \frac{1}{a^{\frac{d+n+4}{2}}} \frac{d+n+2}{2} \frac{d+n}{2} \Gamma\left(\frac{d+n}{2}\right) \pi^{\frac{d-2}{2}} \prod_{k=1}^{d-2} \frac{k+3}{\cancel{2}} \frac{k+1}{\cancel{2}} \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right) \frac{\cancel{2}}{k+4} \frac{\cancel{2}}{k+2} \frac{2}{k} \frac{1}{\Gamma(k/2)}$$

$$= \frac{3}{32} \frac{1}{a^{\frac{d+n+4}{2}}} (d+n)(d+n+2)\, \pi^{d/2} \Gamma\left(\frac{d+n}{2}\right) \prod_{k=1}^{d-2} \frac{2}{k} \frac{(k+1)(k+3)}{(k+2)(k+4)} \prod_{k=1}^{d-2} \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma(k/2)}$$

$$= \frac{3\pi^{d/2}}{32} \frac{1}{a^{\frac{d+n+4}{2}}} (d+n)(d+n+2)\, \Gamma\left(\frac{d+n}{2}\right) 2^{d-2} \underbrace{\prod_{k=1}^{d-2} \frac{(k+1)(k+3)}{k(k+2)(k+4)}}_{= \frac{8(d-1)(d+1)}{\Gamma(d+3)}} \underbrace{\prod_{k=1}^{d-2} \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma(k/2)}}_{= \frac{\Gamma\left(\frac{1+1}{2}\right)}{\Gamma(1/2)} \frac{\Gamma\left(\frac{2+1}{2}\right)}{\Gamma(2/2)} \frac{\Gamma\left(\frac{3+1}{2}\right)}{\Gamma(3/2)} \cdots \frac{\Gamma\left(\frac{d-2+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{d-2}{2}\right)}}$$

$$= \frac{3\pi^{d/2}}{32} \frac{1}{a^{\frac{d+n+4}{2}}} (d+n)(d+n+2)\, \Gamma\left(\frac{d+n}{2}\right) 2^{d-2} \frac{8(d-1)(d+1)}{\Gamma(d+3)} \frac{\Gamma\left(\frac{d-2+1}{2}\right)}{\Gamma(1/2)} \quad ; \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$$

$$= \frac{3}{4} \pi^{\frac{d-1}{2}} \frac{1}{a^{\frac{d+n+4}{2}}} (d+n)(d+n+2)(d-1)(d+1)\, 2^{d-2} \frac{\Gamma\left(\frac{d+n}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right)}{\Gamma(d+3)} \quad ; \frac{1}{\Gamma(d+3)} = \frac{1}{(d+2)\Gamma(d+2)} = \frac{1}{d(d+1)\Gamma(d)(d+2)} = \frac{1}{d(d-1)(d+1)\Gamma(d-1)(d+2)}$$

$$\boxed{= 3\pi^{(d-1)/2}\, 2^{d-4} \frac{(d+n)(d+n+2)}{d(d+2)} \frac{\Gamma\left(\frac{d+n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right)}{\Gamma(d-1)} \frac{1}{a^{\frac{d+n+4}{2}}}}$$

Il reste à trouver Ω_d et d_{ij}. En négligeant les termes déjà trouvés dans Ω_γ :

$$(1+D)d\left(c^2-\tfrac14 c_{12}^2\right)^2 + (1+D)(d-1)\left[\left(c^2+\tfrac14 c_{12}^2\right)^2+\tfrac1d c^2c_{12}^2\right] - (1+D)\left[\left(c^2+\tfrac14 c_{12}^2\right)^2-\tfrac1d c^2 c_{12}^2\right]$$

$$+Ad\left[\left(c^2+\tfrac14 c_{12}^2\right)^2+\tfrac1d c^2c_{12}^2\right]\left(c^2-\tfrac14 c_{12}^2\right)^2 + A(d-1)\left[\left(c^2+\tfrac14 c_{12}^2\right)^4+\tfrac{3}{d^2}c^4c_{12}^4-\tfrac2d c^2c_{12}^2\left(c^2+\tfrac14 c_{12}^2\right)^2\right]$$

$$-A\left[\left(c^2+\tfrac14 c_{12}^2\right)^4-\tfrac{3}{d^2}c^4c_{12}^4\right] + Bd\left(c^2+\tfrac14 c_{12}^2\right)\left(c^2-\tfrac14 c_{12}^2\right)^2 + B(d-2)\left[\left(c^2+\tfrac14 c_{12}^2\right)^3-\tfrac1d c^2c_{12}^2\left(c^2+\tfrac14c_{12}^2\right)\right]$$

$$= (1+D)d\left(c^4+\tfrac1{16}c_{12}^4-\tfrac12 c^2c_{12}^2\right) + \left[(1+D)(d-1)-(1+D)\right]\left(c^4+\tfrac1{16}c_{12}^4+\tfrac12c^2c_{12}^2\right) + \left[(1+D)(d-1)+(1+D)\right]\tfrac1d c^2c_{12}^2$$

$$+Ad\left[c^4+\tfrac1{16}c_{12}^4+\tfrac12c^2c_{12}^2+\tfrac1dc^2c_{12}^2\right]\left(c^4+\tfrac1{16}c_{12}^4-\tfrac12c^2c_{12}^2\right) + \left(c^2+\tfrac14c_{12}^2\right)^4\left[A(d-1)-A\right]+\tfrac{3}{d^2}c^4c_{12}^4\left[A(d-1)+A\right]$$

$$+A(d-1)\left(-\tfrac2d\right)c^2c_{12}^2\left(c^4+\tfrac1{16}c_{12}^4+\tfrac12c^2c_{12}^2\right) + Bd\left(c^2+\tfrac14c_{12}^2\right)\left(c^4+\tfrac1{16}c_{12}^4-\tfrac12c^2c_{12}^2\right)$$

$$+B(d-2)\left[\left(c^2+\tfrac14c_{12}^2\right)\left(c^4+\tfrac1{16}c_{12}^4+\tfrac12c^2c_{12}^2\right)-\tfrac1d c^4c_{12}^2-\tfrac1{4d}c^2c_{12}^4\right]$$

$$= c^4\left[d(1+D)+(1+D)(d-2)\right]+c_{12}^4\left[d(1+D)\tfrac1{16}+(1+D)(d-2)\tfrac1{16}\right]+c^2c_{12}^2\left[-\tfrac12 d(1+D)+\tfrac12(1+D)(d-2)+\tfrac1{\cancel d}\cancel d(1+D)\right]$$

$$+Ad\left[c^8+\tfrac1{16}c^4c_{12}^4-\tfrac12c^6c_{12}^2+\tfrac1{16}c^4c_{12}^4+\tfrac1{16^2}c_{12}^8-\tfrac1{32}c^2c_{12}^6+\left(\tfrac12+\tfrac1d\right)c^6c_{12}^2+\left(\tfrac12+\tfrac1d\right)c^2c_{12}^6\tfrac1{16}-\tfrac12\left(\tfrac12+\tfrac1d\right)c^4c_{12}^4\right]$$

$$+\left(c^4+\tfrac1{16}c_{12}^4+\tfrac12c^2c_{12}^2\right)^2A(d-2)+\tfrac{3}{d^{\cancel2}}c^4c_{12}^4A\cancel d - \tfrac{2A(d-1)}{d}\left[c^6c_{12}^2+\tfrac1{16}c^2c_{12}^6+\tfrac12c^4c_{12}^4\right]$$

$$+Bd\left[c^6+\tfrac1{16}c^2c_{12}^4-\tfrac12c^4c_{12}^2+\tfrac14c^4c_{12}^2+\tfrac1{16}\tfrac14c_{12}^6-\tfrac18c^2c_{12}^4\right]$$

$$+B(d-2)\left[c^6+\tfrac1{16}c^2c_{12}^4+\tfrac12c^4c_{12}^2+\tfrac14c^4c_{12}^2+\tfrac14\tfrac1{16}c_{12}^6+\tfrac18c^2c_{12}^4-\tfrac1dc^4c_{12}^2-\tfrac1{4d}c^2c_{12}^4\right]$$

$= \tfrac12(d-2-d+2)=0$

$$= c^4\left[(1+D)(d-1)2\right]+c_{12}^4\left[\tfrac1{16}(1+D)(d+d-2)\right]+c^2c_{12}^2\left[(1+D)\left(1-\tfrac d2+\tfrac{d-2}2\right)\right]$$

$$+c^8[Ad]+A(d-2)\left(c^8+\tfrac1{16^2}c_{12}^8+\tfrac18c^4c_{12}^4+\tfrac14c^4c_{12}^4+c^2c_{12}^2\left\{c^4+\tfrac1{16}c_{12}^4\right\}\right)$$

$= 2Bd-2B = 2B(d-1)$; $= c^6c_{12}^2+\tfrac1{16}c^2c_{12}^6$

$$+c^6\left[Bd+B(d-2)\right]+c_{12}^6\left[\tfrac1{64}Bd+\tfrac1{64}B(d-2)\right]+Ad\tfrac1{16^2}c_{12}^8$$

$$+c^4c_{12}^4\left[\tfrac2{16}Ad-\tfrac14Ad-\tfrac1{2d}Ad+\tfrac{3A}d-\tfrac{2A(d-1)}d\left(+\tfrac12\right)\right]+c^6c_{12}^2\left[-\tfrac12Ad+\left(\tfrac12+\tfrac1d\right)Ad-\tfrac{2A(d-1)}d\right]$$

$$+c^2c_{12}^6\left[-\tfrac1{32}Ad+\left(\tfrac12+\tfrac1d\right)\tfrac1{16}Ad-\tfrac{2A(d-1)}d\tfrac1{16}\right]+c^2c_{12}^4\left[\tfrac1{16}Bd-\tfrac18Bd+\tfrac1{16}B(d-2)+\tfrac18B(d-2)-\tfrac1{4d}B(d-2)\right]$$

$$+c^4c_{12}^2\left[-\tfrac12Bd+\tfrac14Bd+\tfrac12B(d-2)+\tfrac14B(d-2)-\tfrac1dB(d-2)\right]$$

$$= c^4\left[2(d-1)(1+D)\right]+c_{12}^4\left[\tfrac18(d-1)(1+D)\right]+c^8\left[Ad+A(d-2)\right]+c_{12}^8\left[\tfrac{A(d-2)}{256}+\tfrac{Ad}{256}\right]+c^6\left[2B(d-1)\right]$$

$= 2Ad-2A = 2A(d-1)$

$$+c_{12}^6\left[\tfrac1{64}2B(d-1)\right]+c^4c_{12}^4\left[-\tfrac18Ad-\tfrac1{2\cancel d}A\cancel d+\tfrac3dA-A+\tfrac1dA+A(d-2)\left(\tfrac18+\tfrac14\right)\right]+c^6c_{12}^2\left[-\tfrac12Ad+\tfrac{d+2}{2\cancel d}A\cancel d-\tfrac{2A(d-1)}d+A(d-2)\right]$$

$$+c^2c_{12}^6\left[-\tfrac1{32}Ad+\tfrac{d+2}{2\cancel d}\tfrac1{16}A\cancel d-\tfrac{2A(d-1)}d\tfrac1{16}+\tfrac1{16}A(d-2)\right]+c^2c_{12}^4\left[-\tfrac1{16}Bd+\tfrac1{16}B(d-2)+\tfrac2{16}B(d-2)-\tfrac1{4d}B(d-2)\right]$$

$$+c^4c_{12}^2\left[-\tfrac14Bd+\tfrac34B(d-2)-\tfrac1dB(d-2)\right]$$

$$= c^4\left[2(d-1)(1+D)\right]+c_{12}^4\left[\tfrac18(d-1)(1+D)\right]+c^8\left[2A(d-1)\right]+c_{12}^8\left[\tfrac{A(d-1)}{128}\right]+c^6\left[2B(d-1)\right]+c_{12}^6\left[\tfrac{B(d-1)}{32}\right]$$

$$+c^4c_{12}^4\left[-\tfrac18Ad-\tfrac12A-A+\tfrac4dA+\tfrac38Ad-\tfrac34A\right]+c^6c_{12}^2\left[\cancel{-\tfrac12Ad}+\cancel{\tfrac12dA}+A-2A+\tfrac{2A}d+Ad-2A\right]$$

$$+c^2c_{12}^6\left[-\tfrac1{32}Ad+\tfrac1{32}Ad+\tfrac A{16}-\tfrac18A+\tfrac18\tfrac Ad+\tfrac1{16}Ad-\tfrac18A\right]+c^2c_{12}^4\left[-\tfrac1{16}Bd+\tfrac3{16}B(d-2)-\tfrac14B+\tfrac12\tfrac Bd\right]$$

$$+c^4c_{12}^2\left[-\tfrac14Bd+\tfrac34Bd-\tfrac32B-\tfrac1{\cancel d}B\cancel d+\tfrac{2B}d\right]$$

$\Rightarrow$

$\gamma_{4,0} = 2(d-1)(1+D) = 2(d-1)\left(1+a_2\frac{d(d+2)}8\right)$

$\gamma_{0,4} = \frac18(d-1)\left(1+a_2\frac{d(d+2)}8\right)$

$\gamma_{8,0} = 2(d-1)\frac12a_2 = (d-1)a_2$

$\gamma_{0,8} = \frac1{256}(d-2)\frac12a_2 = \frac{d-1}{128}a_2$

$\gamma_{6,0} = 2(d-1)(-(d+2))\frac12a_2 = -(d+2)(d-1)a_2$

$\gamma_{0,6} = \frac{d-1}{32}\left(-\frac{d+2}2\right)a_2 = -\frac{(d+2)(d-1)}{64}a_2$

$\gamma_{4,4} = \frac28Ad-\frac32A-\frac34A+\frac4dA = \frac12a_2\left(-\frac94+\frac{\;}{8}d+\frac4d\right)$

$\gamma_{6,2} = -3A+Ad+\frac{2A}d = A\left(-3+d+\frac2d\right) = \frac12a_2\left(-3+d+\frac2d\right)$

$$\gamma_{2,6} = \frac{A}{16} - \frac{2}{16}A + \frac{1}{8d}A + \frac{1}{16}Ad - \frac{2}{16}A = -\frac{3}{16}A + \frac{1}{16}Ad + \frac{1}{8d}A = A\left(-\frac{3}{16} + \frac{1}{16}d + \frac{1}{8d}\right) = \frac{1}{2}a_2\left(-\frac{3}{16} + \frac{3}{16}d + \frac{1}{8d}\right)$$

$$\gamma_{2,4} = -\frac{1}{16}Bd + \frac{3}{16}Bd - \frac{3}{8}B - \frac{1}{8}B + \frac{1}{2}\frac{B}{d} = \frac{2}{16}Bd - \frac{5}{8}B + \frac{1}{2}\frac{B}{d} = -\frac{d+2}{2}a_2\left(-\frac{5}{8} + \frac{1}{8}d + \frac{1}{2d}\right)$$

$$\gamma_{4,2} = \frac{2}{4}Bd - \frac{3}{2}B - \frac{2}{2}B + \frac{2}{d}B = B\left(\frac{1}{2}d - \frac{5}{2} + \frac{2}{d}\right) = -\frac{d+2}{2}a_2\left(-\frac{5}{2} + \frac{1}{2}d + \frac{2}{d}\right)$$

On a donc :

$$\boxed{\Omega_\alpha = \{(8,0),(6,0),(6,2),(4,0),(4,2),(4,4),(2,4),(2,6),(0,4),(0,6),(0,8)\}} \quad ✓$$

Avec :

$$\alpha_{8,0} = (d-1)a_2 \; ✓ \quad = 2^8\alpha_{0,8}$$

$$\alpha_{6,0} = -(d+2)(d-1)a_2 \; ✓ \quad = 2^6\alpha_{0,6}$$

$$\alpha_{6,2} = \frac{1}{2}a_2(-3+d+2/d) \; ✓ = \frac{a_2}{2d}(2-3d+d^2) = \frac{a_2}{2d}(d-1)(d-2) = 2^4\alpha_{2,6}$$

$$\alpha_{4,0} = 2(d-1)\left[1 + a_2\frac{d(d+2)}{8}\right] \; ✓ \quad = 2^4\alpha_{0,4}$$

$$\alpha_{4,2} = -\frac{d+2}{2}a_2\left[-\frac{5}{2} + \frac{d}{2} + \frac{2}{d}\right] = \frac{a_2}{4d}\left[8-6d-3d^2+d^3\right] \; ✓ = -\frac{a_2}{4d}(d+2)(d-1)(d-4) = 4\alpha_{2,4}$$

$$\alpha_{4,4} = \frac{1}{2}a_2\left[-\frac{9}{4} + \frac{2}{8}d + \frac{4}{d}\right] = \frac{a_2}{8d}\left[16-9d+d^2\right] \quad ✓$$

$$\alpha_{2,4} = -\frac{d+2}{2}a_2\left[-\frac{5}{8} + \frac{d}{8} + \frac{1}{2d}\right] = -\frac{a_2}{16d}\left[8-6d-3d^2+d^3\right] = -\frac{a_2}{16d}(d+2)(d-1)(d-4)$$

$$\alpha_{2,6} = \frac{1}{16}a_2\left[-\frac{3}{2} + \frac{1}{2}d + \frac{1}{d}\right] = \frac{a_2}{32d}\left[2-3d+d^2\right] \; ✓ = \frac{a_2}{32d}(d-1)(d-2)$$

$$\alpha_{0,4} = \frac{d-1}{8}\left[1 + a_2\frac{d(d+2)}{8}\right] \; ✓$$

$$\alpha_{0,6} = -\frac{(d+2)(d-1)}{64}a_2 \; ✓$$

$$\alpha_{0,8} = \frac{d-1}{256}a_2 \; ✓$$

Ainsi :

$$\sum_{ij\in\Omega_\gamma}\gamma_{ij}M^2_{1111}[i]\,M^{1/2}_{1111}[j+1] = \gamma_{00}M^2_{1111}[0]\,M^{1/2}_{1111}[1]$$

$$= -d^2a_2\; 3\pi^{(d-1)/2}2^{d-4}\frac{d(d+2)}{d(d+2)}\frac{\Gamma(d/2)\Gamma(\frac{d-1}{2})}{\Gamma(d-1)}\frac{1}{2^{\frac{d+4}{2}}}3\pi^{(d-1)/2}2^{d-4}\frac{(d+1)(d+3)}{d(d+2)}\frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})\Gamma(\frac{d-1}{2})}{\Gamma(d-1)}2^{\frac{d+5}{2}}$$

$$= -d\,a_2\,9\pi^{(d-1)}\underbrace{2^{2d-8}2^{-\frac{d+4}{2}}2^{\frac{d+5}{2}}}_{=2^{2d-15/2}}\frac{\Gamma(\frac{d-1}{2})^2\Gamma(d/2)\Gamma(\frac{d+1}{2})}{\Gamma(d-1)^2}\frac{(d+1)(d+3)}{d+2} \quad ✓$$

$$\sum_{ij\in\Omega_\alpha}\alpha_{ij}I^2[i]I^{1/2}[j+1] = \alpha_{8,0}I^2[8]I^{1/2}[1] + \alpha_{6,0}I^2[6]I^{1/2}[1] + \alpha_{6,2}I^2[6]I^{1/2}[3]$$
$$+\alpha_{4,0}I^2[4]I^{1/2}[1] + \alpha_{4,2}I^2[4]I^{1/2}[3] + \alpha_{4,4}I^2[4]I^{1/2}[5]$$
$$+\alpha_{2,4}I^2[2]I^{1/2}[5] + \alpha_{2,6}I^2[2]I^{1/2}[7] + \alpha_{0,4}I^2[0]I^{1/2}[5]$$
$$+\alpha_{0,6}I^2[0]I^{1/2}[7] + \alpha_{0,8}I^2[0]I^{1/2}[9]$$

$$= \alpha_{8,0}\pi^{d/2}\frac{1}{2^{\frac{d+8}{2}}}\frac{\Gamma(\frac{d+8}{2})}{\Gamma(d/2)}\pi^{d/2}2^{\frac{d+1}{2}}\frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})}{\Gamma(d/2)} + \alpha_{6,0}\pi^{d/2}\frac{1}{2^{\frac{d+6}{2}}}\frac{\Gamma(\frac{d+6}{2})}{\Gamma(d/2)}\pi^{d/2}2^{\frac{d+1}{2}}\frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})}{\Gamma(d/2)}$$
$$+\alpha_{6,2}\pi^{d/2}\frac{1}{2^{\frac{d+6}{2}}}\frac{\Gamma(\frac{d+6}{2})}{\Gamma(d/2)}\pi^{d/2}2^{\frac{d+3}{2}}\frac{\Gamma(\frac{d+3}{2})}{\Gamma(d/2)} + \alpha_{4,0}\pi^{d/2}\frac{1}{2^{\frac{d+4}{2}}}\frac{\Gamma(\frac{d+4}{2})}{\Gamma(d/2)}\pi^{d/2}2^{\frac{d+1}{2}}\frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})}{\Gamma(d/2)}$$
$$+\alpha_{4,2}\pi^{d/2}\frac{1}{2^{\frac{d+4}{2}}}\frac{\Gamma(\frac{d+4}{2})}{\Gamma(d/2)}\pi^{d/2}2^{\frac{d+3}{2}}\frac{\Gamma(\frac{d+3}{2})}{\Gamma(d/2)} + \alpha_{4,4}\pi^{d/2}\frac{1}{2^{\frac{d+4}{2}}}\frac{\Gamma(\frac{d+4}{2})}{\Gamma(d/2)}\pi^{d/2}2^{\frac{d+5}{2}}\frac{\Gamma(\frac{d+5}{2})}{\Gamma(d/2)}$$
$$+\alpha_{2,4}\pi^{d/2}\frac{1}{2^{\frac{d+2}{2}}}\frac{\Gamma(\frac{d+2}{2})}{\Gamma(d/2)}\pi^{d/2}2^{\frac{d+5}{2}}\frac{\Gamma(\frac{d+5}{2})}{\Gamma(d/2)} + \alpha_{2,6}\pi^{d/2}\frac{1}{2^{\frac{d+2}{2}}}\frac{\Gamma(\frac{d+2}{2})}{\Gamma(d/2)}\pi^{d/2}2^{\frac{d+7}{2}}\frac{\Gamma(\frac{d+7}{2})}{\Gamma(d/2)}$$
$$+\alpha_{0,4}\pi^{d/2}\frac{1}{2^{d/2}}\frac{\Gamma(d/2)}{\Gamma(d/2)}\pi^{d/2}2^{\frac{d+5}{2}}\frac{\Gamma(\frac{d+5}{2})}{\Gamma(d/2)} + \alpha_{0,6}\pi^{d/2}\frac{1}{2^{d/2}}\frac{\Gamma(d/2)}{\Gamma(d/2)}\pi^{d/2}2^{\frac{d+7}{2}}\frac{\Gamma(\frac{d+7}{2})}{\Gamma(d/2)}$$
$$+\alpha_{0,8}\pi^{d/2}\frac{1}{2^{d/2}}\frac{\Gamma(d/2)}{\Gamma(d/2)}\pi^{d/2}2^{\frac{d+9}{2}}\frac{\Gamma(\frac{d+9}{2})}{\Gamma(d/2)}$$

$$= \pi^d\frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})}{\Gamma(d/2)}\Big[\alpha_{8,0}\frac{2^{1/2}}{2^{8/2}}\frac{d+6}{2}\frac{d+4}{2}\frac{d+2}{2}\frac{d}{2} + \alpha_{6,0}\frac{2^{1/2}}{2^{6/2}}\frac{d+4}{2}\frac{d+2}{2}\frac{d}{2} + \alpha_{6,2}\frac{2^{3/2}}{2^{6/2}}\frac{d+4}{2}\frac{d+2}{2}\frac{d}{2}\frac{d+1}{2}$$
$$+\alpha_{4,0}\frac{2^{1/2}}{2^{4/2}}\frac{d+2}{2}\frac{d}{2} + \alpha_{4,2}\frac{2^{3/2}}{2^{4/2}}\frac{d+2}{2}\frac{d}{2}\frac{d+1}{2} + \alpha_{4,4}\frac{2^{5/2}}{2^{4/2}}\frac{d+2}{2}\frac{d}{2}\frac{d+3}{2}\frac{d+1}{2}$$
$$+\alpha_{2,4}\frac{2^{5/2}}{2^{2/2}}\frac{d}{2}\frac{d+3}{2}\frac{d+1}{2} + \alpha_{2,6}\frac{2^{7/2}}{2^{2/2}}\frac{d}{2}\frac{d+5}{2}\frac{d+3}{2}\frac{d+1}{2} + \alpha_{0,4}2^{5/2}\frac{d+3}{2}\frac{d+1}{2}$$
$$+\alpha_{0,6}2^{7/2}\frac{d+5}{2}\frac{d+3}{2}\frac{d+1}{2} + \alpha_{0,8}2^{9/2}\frac{d+7}{2}\frac{d+5}{2}\frac{d+3}{2}\frac{d+1}{2}\Big]$$

$$= \pi^d 2^{1/2} \frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})}{\Gamma(d/2)} \Big[\alpha_{8,0} 2^{-8} (d+6)(d+4)(d+2)d + \alpha_{6,0} 2^{-6}(d+4)(d+2)d + \alpha_{6,2} 2^{-6}(d+4)(d+2)(d+1)d$$
$$+ \alpha_{4,0} 2^{-4}(d+2)d + \alpha_{4,2} 2^{-4}(d+2)(d+1)d + \alpha_{4,4} 2^{-4}(d+3)(d+2)(d+1)d$$
$$+ \alpha_{2,4} 2^{-2}(d+3)(d+1)d + \alpha_{2,6} 2^{-2}(d+5)(d+3)(d+1)d + \alpha_{0,4} 2^{0}(d+3)(d+1)$$
$$+ \alpha_{0,6} 2^{0}(d+5)(d+3)(d+1) + \alpha_{0,8} 2^{0}(d+7)(d+5)(d+3)(d+1) \Big]$$

$$= \pi^d 2^{1/2} 2^{-3} \frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})}{\Gamma(d/2)} \Big[a_2 (d-1) 2^{-5}(d+6)(d+4)(d+2)d - a_2 2^{-3}(d+2)(d-1)(d+4)(d+2)d + \frac{a_2}{2d}(d-1)(d-2)2^{-3}(d+4)(d+2)(d+1)d$$
$$+ 2(d-1)\Big[1 + a_2 \frac{d(d+2)}{8}\Big] 2^{-1}(d+2)d - \frac{a_2}{4d}(d+2)(d-1)(d-4)2^{-1}(d+2)(d+1)d + \frac{a_2}{8d}(16-9d+d^2)2^{-1}(d+3)(d+2)(d+1)d$$
$$- \frac{a_2}{16d}(d+2)(d-1)(d-4)2^{+1}(d+3)(d+1)d + \frac{a_2}{32d}(d-1)(d-2)2^{1}(d+5)(d+3)(d+1)d + \frac{d-1}{8}\Big[1 + a_2\frac{d(d+2)}{8}\Big]2^3(d+3)(d+1)$$
$$- \frac{(d+2)(d-1)}{64} a_2 2^3 (d+5)(d+3)(d+1) + \frac{d-1}{256} a_2 2^3 (d+7)(d+5)(d+3)(d+1) \Big]$$

Avec:

$$a_2(d-1)2^{-5}(d+6)(d+4)(d+2)d = a_2 2^{-5}(d+6)(d+4)(d+2)(d^2-d) = a_2 2^{-5}(d+6)(d+4)(d^3-d^2+2d^2-2d)$$
$$= a_2 2^{-5}(d+6)(d^4+d^3-2d^2+4d^3+4d^2-8d) = a_2 2^{-5}(d+6)(d^4+5d^3+2d^2-8d)$$
$$= a_2 2^{-5}(d^5+5d^4+2d^3-8d^2+6d^4+30d^3+12d^2-48d)$$
$$= a_2 2^{-5}(d^5+11d^4+32d^3+4d^2-48d) \quad ✓$$

$$-a_2 2^{-3}(d+2)(d-1)(d+4)(d+2)d = -a_2 2^{-5} 4 (d+4)(d+2)^2 d(d-1) = -a_2 2^{-5} 4 (d+4)(d^2+4d+4)(d^2-d)$$
$$= -a_2 2^{-5} 4 (d+4)(d^4-d^3+4d^3-4d^2+4d^2-4d) = -a_2 2^{-5}(d+4)(d^4+3d^3-4d)\cdot 4$$
$$= -a_2 2^{-5}(d^5+3d^4-4d^2+4d^4+12d^3-16d)\cdot 4$$
$$= a_2 2^{-5}(-d^5-7d^4-12d^3+4d^2+16d)\cdot 4$$
$$= a_2 2^{-5}(-4d^5-28d^4-48d^3+16d^2+64d) \quad ✓$$

$$\frac{a_2}{2d}(d-1)(d-2)2^{-3}(d+4)(d+2)(d+1)d = a_2 2^{-5}\, 2(d+4)(d+2)(d+1)(d-1)(d-2) = a_2 2^{-5} 2 (d+4)(d+2)(d+1)(d^2-3d+2)$$
$$= a_2 2^{-5} 2 (d+4)(d+2)(d^3-3d^2+2d+d^2-3d+2) = a_2 2^{-5} 2(d+4)(d+2)(d^3-2d^2-d+2)$$
$$= a_2 2^{-5} 2 (d+4)(d^4-2d^3-d^2+2d+2d^3-4d^2-2d+4)$$
$$= a_2 2^{-5} 2 (d+4)(d^4-5d^2+4) = a_2 2^{-5} 2 (d^5-5d^3+4d+4d^4-20d^2+16)$$
$$= a_2 2^{-5}(2d^5+8d^4-10d^3-40d^2+8d+32) \quad ✓$$

$$2(d-1)\Big[1+a_2\frac{d(d+2)}{8}\Big]2^{-1}(d+2)d = (d-1)(d^2+2d)\Big[1+a_2\frac{d(d+2)}{8}\Big] = (d^3+2d^2-d^2-2d)\Big[1+a_2\frac{d(d+2)}{8}\Big]$$
$$= d^3+d^2-2d + a_2 2^{-5}\, 2^2 (d^2+2d)(d^3+d^2-2d)$$
$$= d^3+d^2-2d + a_2 2^{-5} 4 (d^5+d^4-2d^3+2d^4+2d^3-4d^2)$$
$$= d^3+d^2-2d + a_2 2^{-5}(4d^5+12d^4-16d^2) \quad ✓$$

$$-\frac{a_2}{4d}(d+2)(d-1)(d-4)2^{-1}(d+2)(d+1)d = -\frac{a_2}{2^3}(d+2)^2(d+1)(d-1)(d-4) = -a_2 2^{-5}\, 2^2 (d+2)^2(d+1)(d^2-5d+4)$$
$$= -a_2 2^{-5} 4 (d^2+4d+4)(d^3-5d^2+4d+d^2-5d+4) = -a_2 2^{-5} 4(d^2+4d+4)(d^3-4d^2-d+4)$$
$$= -a_2 2^{-5} 4 (d^5-4d^4-d^3+4d^2+4d^4-16d^3-4d^2+16d+4d^3-16d^2-4d+16)$$
$$= -a_2 2^{-5} 4 (d^5-13d^3-16d^2+12d+16)$$
$$= a_2 2^{-5}(-4d^5+52d^3+64d^2-48d-64) \quad ✓$$

$$\frac{a_2}{8d}(16-9d+d^2)2^{-1}(d+3)(d+2)(d+1)d = a_2 2^{-5}\, 2(d+3)(d+2)(d+1)(16-9d+d^2) = a_2 2^{-5} 2 (d+3)(d+2)(d^3-9d^2+16d+d^2-9d+16)$$
$$= a_2 2^{-5} 2 (d+3)(d+2)(d^3-8d^2+7d+16) = a_2 2^{-5} 2 (d+3)(d^4-8d^3+7d^2+16d+2d^3-16d^2+14d+32)$$
$$= a_2 2^{-5} 2 (d+3)(d^4-6d^3-9d^2+30d+32) = a_2 2^{-5} 2 (d^5-6d^4-9d^3+30d^2+32d+3d^4-18d^3-27d^2+90d+96)$$
$$= a_2 2^{-5} 2 (d^5-3d^4-27d^3+3d^2+122d+96) = a_2 2^{-5}(2d^5-6d^4-54d^3+6d^2+244d+192) \quad ✓$$

$$-\frac{a_2}{16d}(d+2)(d-1)(d-4)2(d+3)(d+1)d = -a_2 2^{-4} 2 (d+3)(d+2)(d+1)(d-1)(d-4) = -a_2 2^{-5}\, 2^2 (d+3)(d+2)(d+1)(d^2-5d+4)$$
$$= -a_2 2^{-5} 4 (d+3)(d+2)(d^3-5d^2+4d+d^2-5d+4) = -a_2 2^{-5} 4 (d+3)(d+2)(d^3-4d^2-d+4)$$
$$= -a_2 2^{-5} 4 (d+3)(d^4-4d^3-d^2+4d+2d^3-8d^2-2d+8) = -a_2 2^{-5} 4 (d+3)(d^4-2d^3-9d^2+2d+8)$$
$$= -a_2 2^{-5} 4 (d^5-2d^4-9d^3+2d^2+8d+3d^4-6d^3-27d^2+6d+24)$$
$$= -a_2 2^{-5} 4 (d^5+d^4-15d^3-25d^2+14d+24)$$
$$= a_2 2^{-5}(-4d^5-4d^4+60d^3+100d^2-56d-96) \quad ✓$$

$$\frac{a_2}{32d}(d-1)(d-2)2^1(d+5)(d+3)(d+1)d = a_2 2^{-5}2(d+5)(d+3)(d+1)(d^2-3d+2) = a_2 2^{-5}2(d+5)(d+3)(d^3-3d^2+2d+d^2-3d+2)$$
$$= a_2 2^{-5}2(d+5)(d+3)(d^3-2d^2-d+2) = a_2 2^{-5}2(d+5)(d^4-2d^3-d^2+2d+3d^3-6d^2-3d+6)$$
$$= a_2 2^{-5}2(d+5)(d^4+d^3-7d^2-d+6) = a_2 2^{-5}2(d^5+d^4-7d^3-d^2+6d+5d^4+5d^3-35d^2-5d+30)$$
$$= a_2 2^{-5}2(d^5+6d^4-2d^3-36d^2+d+30) = a_2 2^{-5}(2d^5+12d^4-4d^3-72d^2+2d+60) \checkmark$$

$$\frac{d-1}{8}\left[1+a_2\frac{d(d+2)}{8}\right]2^3(d+3)(d+1) = \left[1+a_2\frac{d(d+2)}{8}\right](d+3)(d^2-1) = \left[1+a_2\frac{d(d+2)}{8}\right](d^3-d+3d^2-3) = \left[1+a_2\frac{d(d+2)}{8}\right](d^3+3d^2-d-3)$$
$$= d^3+3d^2-d-3 + a_2 2^{-3}d(d^4+3d^3-d^2-3d+2d^3+6d^2-2d-6)$$
$$= d^3+3d^2-d-3 + a_2 2^{-5}4(d^5+3d^4-d^3-3d^2+2d^4+6d^3-2d^2-6d)$$
$$= d^3+3d^2-d-3 + a_2 2^{-5}4(d^5+5d^4+5d^3-5d^2-6d)$$
$$= d^3+3d^2-d-3 + a_2 2^{-5}(4d^5+20d^4+20d^3-20d^2-24d) \checkmark$$

$$-\frac{(d+2)(d-1)}{64}a_2 2^3(d+5)(d+3)(d+1) = -2^{-6}2^3 a_2(d+5)(d+3)(d+2)(d^2-1) = -a_2 2^{-5}2^2(d+5)(d+3)(d^3-d+2d^2-2)$$
$$= -a_2 2^{-5}4(d+5)(d+3)(d^3+2d^2-d-2) = -a_2 2^{-5}4(d+5)(d^4+2d^3-d^2-2d+3d^3+6d^2-3d-6)$$
$$= -a_2 2^{-5}4(d+5)(d^4+5d^3+5d^2-5d-6) = -a_2 2^{-5}4(d^5+5d^4+5d^3-5d^2-6d+5d^4+25d^3+25d^2-25d-30)$$
$$= -a_2 2^{-5}4(d^5+10d^4+30d^3+20d^2-31d-30) = -a_2 2^{-5}(4d^5+40d^4+120d^3+80d^2-124d-120)$$
$$= a_2 2^{-5}(-4d^5-40d^4-120d^3-80d^2+124d+120) \checkmark$$

$$\frac{d-1}{256}a_2 2^3(d+7)(d+5)(d+3)(d+1) = 2^{-8}2^3 a_2(d+7)(d+5)(d+3)(d^2-1) = a_2 2^{-5}(d+7)(d+5)(d^3-d+3d^2-3)$$
$$= a_2 2^{-5}(d+7)(d+5)(d^3+3d^2-d-3) = a_2 2^{-5}(d+7)(d^4+3d^3-d^2-3d+5d^3+15d^2-5d-15)$$
$$= a_2 2^{-5}(d+7)(d^4+8d^3+14d^2-8d-15) = a_2 2^{-5}(d^5+8d^4+14d^3-8d^2-15d+7d^4+56d^3+98d^2-56d-105)$$
$$= a_2 2^{-5}(d^5+15d^4+70d^3+90d^2-71d-105) \checkmark$$

Ainsi:

$$\sum_{ij\in S_\alpha}\alpha_{ij}I^2[i]I^{1/2}[j+1] = \pi^d 2^{1/2}2^{-3}\frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})}{\Gamma(d/2)}\Big[2d^3+4d^2-3d-3 + a_2 2^{-5}\Big\{d^5(1-4+2+4-4+2-4+2+4-4+1)$$
$$+d^4(11-28+8+12-6-4+12+20-40+15)$$
$$+d^3(32-48-10+52-54+60-4+20-120+70)$$
$$+d^2(4+16-40-16+64+6+100-72-20-80+90)$$
$$+d(-48+64+8-48+244-56+2-24+124-71)$$
$$+32-64+192-96+60+120-105\Big\}\Big]$$

$$= \pi^d 2^{1/2}2^{-3}\frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})}{\Gamma(d/2)}\left[2d^3+4d^2-3d-3+\frac{a_2}{32}(-2d^3+52d^2+195d+139)\right] \checkmark$$

Ainsi:

$$V_2^{a*} = \frac{\beta^2\sigma^{d-1}nm^2\beta_1V_1^5}{d(d+2)(d-1)V_0\pi^d}\left[\sum_{ij\in S_\alpha}\alpha_{ij}I^2[i]I^{1/2}[j+1] + \sum_{ij\in S_\gamma}\gamma_{ij}M^2[i]M^{1/2}[j+1]\right]$$
$$= \frac{\beta^2\sigma^{d-1}nm^2}{d(d+2)(d-1)}\frac{\pi^{(d-1)/2}}{\Gamma(\frac{d+1}{2})}\left(\frac{2}{\beta m}\right)^{5/2}\frac{1}{\pi^d}\frac{\beta}{n}\frac{d+2}{8}\frac{\Gamma(d/2)}{\pi^{(d-1)/2}}\frac{\sqrt{mk_BT}}{\sigma^{d-1}}\left[\sum_{ij\in S_\alpha}\alpha_{ij}I^2[i]I^{1/2}[j+1] + \sum_{ij\in S_\gamma}\gamma_{ij}M^2[i]M^{1/2}[j+1]\right]$$
$$= \frac{\beta^2m^2}{d(d+2)(d-1)}\frac{\Gamma(d/2)}{\Gamma(\frac{d+1}{2})}\frac{4}{\beta^2m^2}\sqrt{\frac{2}{\beta m}}\frac{1}{\pi^d}\beta\frac{d+2}{8}\sqrt{\frac{m}{\beta}}\left[\sum_{ij\in S_\alpha}\alpha_{ij}I^2[i]I^{1/2}[j+1] + \sum_{ij\in S_\gamma}\gamma_{ij}M^2[i]M^{1/2}[j+1]\right]$$
$$= \frac{\Gamma(d/2)}{\Gamma(\frac{d+1}{2})}\frac{\sqrt2}{2}\frac{1}{\pi^d}\frac{1}{d(d-1)}\left[\sum_{ij\in S_\alpha}\alpha_{ij}I^2[i]I^{1/2}[j+1] + \sum_{ij\in S_\gamma}\gamma_{ij}M^2[i]M^{1/2}[j+1]\right]$$
$$= \frac{1}{d(d-1)}\frac{1}{\sqrt2\pi^d}\frac{\Gamma(d/2)}{\Gamma(\frac{d+1}{2})}\left[\pi^d\sqrt2\,2^{-3}\frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})}{\Gamma(d/2)}\left\{2d^3+4d^2-3d-3+\frac{a_2}{32}(-2d^3+52d^2+195d+139)\right\} - d\,a_2\,9\,\pi^{d-1}2^{2d}\overbrace{2^{-\frac{15}{2}}}^{=\sqrt2\,2^{-\frac{16}{2}}}\frac{(d+1)(d+3)}{d+2}\frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})^2\Gamma(\frac{d}{2})\Gamma(\frac{d+1}{2})}{\Gamma(d-1)^2}\right]$$
$$= \frac{1}{d(d-1)}\frac{1}{\sqrt2\pi^d}\frac{\Gamma(d/2)}{\Gamma(\frac{d+1}{2})}\left[\pi^d\sqrt2\,2^{-3}\frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})}{\Gamma(d/2)}\left\{2d^3+4d^2-3d-3+\frac{a_2}{32}(-2d^3+52d^2+195d+139)\right\} - \pi^d\sqrt2\,2^{-3}\frac{d(d+1)(d+3)}{d+2}\frac{1}{\pi}9a_2 2^{2d}2^{-5}\frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})}{\Gamma(\frac{d}{2})}\left(\frac{\Gamma(\frac{d-1}{2})\Gamma(d/2)}{\Gamma(d-1)}\right)^2\right]$$
$$= \frac{1}{d(d-1)}\frac{1}{\sqrt2\pi^d}\frac{\Gamma(d/2)}{\Gamma(\frac{d+1}{2})}\pi^d\sqrt2\,2^{-3}\frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})}{\Gamma(d/2)}\left[2d^3+4d^2-3d-3+\frac{a_2}{32}(-2d^3+52d^2+195d+139) - \frac{d(d+1)(d+3)}{d+2}\frac{9a_2 2^{2d}}{\pi}2^{-5}\underbrace{\left\{\frac{\Gamma(\frac{d-1}{2})\Gamma(d/2)}{\Gamma(d-1)}\right\}^2}_{=4^{2-d}\pi = 2^{4-2d}\pi}\right]$$
$$= \frac{1}{8d(d-1)}\left[2d^3+4d^2-3d-3+\frac{a_2}{32}(-2d^3+52d^2+195d+139) - \frac{a_2}{32}\frac{d(d+1)(d+3)}{d+2}2^4\cdot 9\right]$$
$$= \frac{1}{8d(d-1)}\left[\underbrace{2d^3+4d^2-3d-3}_{=(d-1)(3+6d+2d^2)} + \frac{a_2}{32}\left\{-2d^3+52d^2+195d+139-144\frac{d(d+1)(d+3)}{d+2}\right\}\right]$$

$$= \frac{\cancel{(d-1)}(3+6d+2d^2)}{8d\cancel{(d-1)}} + \frac{a_2}{256d(d-1)(d+2)}\left[(d+2)(-2d^3+52d^2+195d+139) - 144d(d+1)(d+3)\right]$$

$$= \frac{3+6d+2d^2}{8d} + \frac{a_2}{256d(d-1)(d+2)}\left[-2d^4+52d^3+195d^2+139d-4d^3+104d^2+390-144(d^3+4d^2+3d)\right]$$

$$= \frac{3+6d+2d^2}{8d} + \frac{a_2}{256d(d-1)(d+2)}\left[-2d^4+48d^3+299d^2+529d+278\right]$$

$$= \frac{3+6d+2d^2}{8d} + \frac{a_2}{256d(d-1)(d+2)}(d-1)(-2d^3-98d^2-375d-278)$$

$$\Rightarrow \boxed{\nu_\zeta^{a*} = \frac{3+6d+2d^2}{8d} - a_2\frac{2d^3+98d^2+375d+278}{256d(d+2)}}$$

Vérification de ν_κ^* et ν_μ^*

$$\nu_\kappa^* = \nu_\mu^* \doteq \nu^* = \frac{2m\beta^3}{d(d+2)n\nu_0}\Bigg[\underbrace{p\int_{\mathbb{R}^d} dv\, S_i(v)\, L_a[\mathcal{M}S_i]}_{\substack{\text{annihilation. à vérifier}\\ p\nu^{*a}}} + \underbrace{(1-p)\int_{\mathbb{R}^d} dv\, S_i(v)\, L_c[\mathcal{M}S_i]}_{\substack{\text{Ok, terme déjà calculé dans}\\ \text{la littérature}}} \underbrace{- p\int_{\mathbb{R}^d} dv\, S_i(v)\, \Omega[\mathcal{M}S_i]}_{\substack{\text{terme additionnel}\\ \text{à vérifier ; } p\nu^{*a'}}}\Bigg] \qquad (1)$$

Commençons par la vérification du terme additionnel : $\nu^{*a'}$:

$$I := -\frac{2m\beta^3}{d(d+2)n\nu_0}\, p\int_{\mathbb{R}^d} dV\, S_i(V)\,\Omega[\mathcal{M}S_i]$$

$$= -p\frac{2m\beta^3}{d(d+2)n\nu_0}\int_{\mathbb{R}^d} dv\, \overbrace{S_i(v)}^{\text{impair}}\Bigg[\overbrace{f^{(0)}(v)}^{\text{pair}}\overbrace{\frac{2}{n}\omega[f^{(0)},\mathcal{M}S_i]}^{\text{indép. de } v} - \overbrace{\frac{\partial f^{(0)}}{\partial V_j}}^{\text{impair}} V_T\overbrace{\frac{1}{nV_T}\left\{\omega[f^{(0)},V_j\mathcal{M}S_i] + \omega[V_j f^{(0)},\mathcal{M}S_i]\right\}}^{\text{indép. de } v}$$
$$+\underbrace{\frac{\partial f^{(0)}}{\partial T}}_{\text{pair}} T\underbrace{\left\{-\frac{2}{n}\omega[f^{(0)},\mathcal{M}S_i] + \frac{m}{nk_BTd}\omega[f^{(0)},V^2\mathcal{M}S_i] + \frac{m}{nk_BTd}\omega[V^2f^{(0)},\mathcal{M}S_i]\right\}}_{\text{indép. de } v}\Bigg]$$

$$\overset{\text{parité}}{=} -p\frac{2m\beta^3}{d(d+2)n\nu_0}\int_{\mathbb{R}^d} dv\, S_i(v)\left(-\frac{\partial f^{(0)}}{\partial V_j}\right)\underbrace{\frac{1}{n}\left(\omega[f^{(0)},V_j\mathcal{M}S_i] + \omega[V_jf^{(0)},\mathcal{M}S_i]\right)}_{\doteq K_{ij}\ \text{: constante par rapport à } \underline{V}}$$

$$= p\frac{2m\beta^3}{d(d+2)n\nu_0}K_{ij}\int_{\mathbb{R}^d} dv\, S_i(v)\frac{\partial f^{(0)}}{\partial V_j}$$

$$= p\frac{2m\beta^3}{d(d+2)n\nu_0}K_{ij}\left[-\int_{\mathbb{R}^d} dv\, f^{(0)}(v)\frac{\partial S_i(V)}{\partial V_j} + \underbrace{f^{(0)}(V)S_i(V)\Big|_{\partial\Omega}}_{\longrightarrow 0}\right]$$

$$= -p\frac{2m\beta^3}{d(d+2)n\nu_0}K_{ij}\int_{\mathbb{R}^d} dV\,\frac{n}{V_T^d}\frac{1}{\pi^{d/2}}e^{-V^2/V_T^2}\left[1+a_2S_2\left(\tfrac{V^2}{V_T^2}\right)\right]\underbrace{\frac{\partial}{\partial V_j}\left(\frac{m}{2}V^2 - \frac{d+2}{2}k_BT\right)V_i}_{=\delta_{ij}\left(\frac{m}{2}V^2 - \frac{d+2}{2}\frac{1}{\beta}\right) + V_i\left(\frac{m}{2}2V_j\right)} \quad ;\ V_T = \sqrt{\frac{2}{\beta m}}$$

$$= -p\frac{2m\beta^3}{d(d+2)n\nu_0}K_{ij}\frac{n}{V_T^d}\frac{1}{\pi^{d/2}}\int_{\mathbb{R}^d} dc\, V_T^d e^{-c^2}\left[1+a_2\left\{\tfrac{1}{2}c^4 - \tfrac{d+2}{2}c^2 + \tfrac{d(d+2)}{8}\right\}\right]\left[m\,\delta_{ij}\left(\tfrac{1}{2}c^2V_T^2 - \tfrac{d+2}{4}\overbrace{\tfrac{2}{\beta m}}^{=V_T^2}\right) + V_T^2c_ic_j\right] \quad ; c = V/V_T$$

$$= -p\frac{2m^2\beta^3}{d(d+2)\nu_0}\frac{1}{\pi^{d/2}}K_{ij}V_T^2\int_{\mathbb{R}^d} dc\, e^{-c^2}\left[1+a_2\left\{\tfrac{1}{2}c^4 - \tfrac{d+2}{2}c^2 + \tfrac{d(d+2)}{8}\right\}\right]\left[c_ic_j + \delta_{ij}\tfrac{1}{2}\left(c^2 - \tfrac{d+2}{2}\right)\right]$$

$$= -p\frac{2m\beta^2}{d(d+2)\nu_0}\frac{1}{\pi^{d/2}}\frac{2}{\beta m}K_{ij}\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d} dc\, e^{-c^2}\left[1+a_2\left\{\tfrac{1}{2}c^4 - \tfrac{d+2}{2}c^2 + \tfrac{d(d+2)}{8}\right\}\right]\left[2c_ic_j + \delta_{ij}c^2 - \delta_{ij}\frac{d+2}{2}\right]$$

$$= -p\frac{2m\beta^2}{d(d+2)\nu_0}\frac{1}{\pi^{d/2}}K_{ij}\int_{\mathbb{R}^d} dc\, e^{-c^2}\Bigg[\left(1+a_2\tfrac{d(d+2)}{8}\right)2c_ic_j + \left(1+a_2\tfrac{d(d+2)}{8}\right)\delta_{ij}c^2 - \left(1+a_2\tfrac{d(d+2)}{8}\right)\delta_{ij}\frac{d+2}{2}$$
$$+ a_2c^4c_ic_j + a_2\tfrac{1}{2}\delta_{ij}c^6 - a_2\tfrac{1}{2}\delta_{ij}\tfrac{d+2}{2}c^4$$
$$- a_2\tfrac{d+2}{2}2c_ic_jc^2 - a_2\tfrac{d+2}{2}\delta_{ij}c^4 + a_2\tfrac{d+2}{2}\delta_{ij}\tfrac{d+2}{2}c^2\Bigg]$$

$$= -p\frac{2m\beta^2}{d(d+2)\nu_0}\frac{1}{\pi^{d/2}}K_{ij}\Bigg[2\left(1+a_2\tfrac{d(d+2)}{8}\right)M_{ij}^{(1)}[0] + \left(1+a_2\tfrac{d(d+2)}{8}\right)\delta_{ij}I^{(1)}[2] - \left(1+a_2\tfrac{d(d+2)}{8}\right)\tfrac{d+2}{2}\delta_{ij}I^{(1)}[0]$$
$$+ a_2M_{ij}^{(1)}[4] + \tfrac{1}{2}a_2\delta_{ij}I^{(1)}[6] - a_2\tfrac{d+2}{4}\delta_{ij}I^{(1)}[4]$$
$$- a_2(d+2)M_{ij}^{(1)}[2] - a_2\tfrac{d+2}{2}\delta_{ij}I^{(1)}[4] + a_2\tfrac{(d+2)^2}{4}\delta_{ij}I^{(1)}[2]\Bigg] \qquad (2)$$

avec :

$$I^{(a)}[n] = \int_{\mathbb{R}^d} d\underline{x}\, e^{-ax^2}|x|^n = \frac{\pi^{d/2}}{a^{\frac{d+n}{2}}}\frac{\Gamma\left(\frac{d+n}{2}\right)}{\Gamma(d/2)} \qquad (3)$$

$$M_{ij}^{(a)}[n] = \int_{\mathbb{R}^d} d\underline{x}\, e^{-ax^2}|x|^n x_ix_j = \delta_{ij}\,\pi^{\frac{d-1}{2}}\,2^{d-3}\,\frac{d+n}{d}\,\frac{\Gamma\left(\frac{d+n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right)}{\Gamma(d-1)}\,\frac{1}{a^{\frac{d+n+2}{2}}} \qquad (4)$$

Preuve de l'Eq. (4) : en général l'intégrale a la forme :

$$M_{ij}^{(a)}(n) = a_{ij}\,\delta_{ij} + (1-\delta_{ij})\,b_{ij}$$

Par isotropie $a_{ij}=a\ \forall i,j$, et de plus comme l'orientation du repère ne doit pas modifier l'intégrale $b_{ij}=b\ \forall i,j$.
Ainsi pour $i\neq j$:

$$b = \int_{\mathbb{R}^d} d\underline{x}\, e^{-ax^2} |x|^n x_i x_j$$

$$= \int_0^\infty dr\, r^{d-1} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta_1 \dots \int_0^\pi d\theta_{d-2} \prod_{k=1}^{d-2} (\sin\theta_k)^k\, r^n r^2 \cos\varphi \sin\varphi \prod_{k=1}^{d-2} \sin\theta_k^2\, e^{-ar^2} \quad , i=1, j=2$$

$$= \int_0^\infty dr\, e^{-ar^2} r^{d+n+1} \left(\prod_{k=1}^{d-2} \int_0^\pi d\theta\, \sin\theta^{k+2} \right) \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi\, \cos\varphi \sin\varphi}_{=0}$$

$$= 0 \qquad (5)$$

Pour $i=j$ (= 1 p. exemple) :

$$a = \int_{\mathbb{R}^d} d\underline{x}\, e^{-ax^2} |x|^n x_1^2$$

$$= \int_0^\infty dr\, e^{-ar^2} r^{d-1} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta_1 \dots \int_0^\pi d\theta_{d-2} \prod_{k=1}^{d-2} (\sin\theta_k)^k\, r^n r^2 \cos^2\varphi \prod_{k=1}^{d-2} \sin\theta_k^2$$

$$= \underbrace{\int_0^\infty dr\, e^{-ar^2} r^{d+n+1}}_{=\frac{1}{2}\frac{1}{a^{\frac{d+n+2}{2}}}\Gamma\left(\frac{d+n+2}{2}\right)} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi \cos^2\varphi}_{=\pi} \left(\prod_{k=1}^{d-2} \underbrace{\int_0^\pi d\theta\, \sin\theta^{k+2}}_{=\sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma\left(\frac{k+3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+4}{2}\right)}} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{a^{\frac{d+n+2}{2}}} \frac{d+n}{2} \Gamma\left(\frac{d+n}{2}\right) \pi\, \pi^{\frac{d-2}{2}} \prod_{k=1}^{d-2} \frac{k+1}{\cancel{2}} \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right) \frac{\cancel{2}}{k+2} \frac{2}{k} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}$$

$$= \frac{1}{a^{\frac{d+n+2}{2}}} \frac{d+n}{4} \Gamma\left(\frac{d+n}{2}\right) \pi^{\frac{d}{2}} \underbrace{\prod_{k=1}^{d-2} 2\, \frac{k+1}{k(k+2)}}_{=2^{d-2}\frac{2(d-1)}{\Gamma(d+1)}} \underbrace{\prod_{k=1}^{d-2} \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma(k/2)}}_{=\frac{\cancel{\Gamma\left(\frac{1+1}{2}\right)}}{\Gamma(1/2)} \frac{\cancel{\Gamma\left(\frac{2+1}{2}\right)}}{\cancel{\Gamma(2/2)}} \frac{\cancel{\Gamma\left(\frac{3+1}{2}\right)}}{\cancel{\Gamma(3/2)}} \cdots \frac{\cancel{\Gamma\left(\frac{d-3+1}{2}\right)}}{\cancel{\Gamma\left(\frac{d-3}{2}\right)}} \frac{\Gamma\left(\frac{d-2+1}{2}\right)}{\cancel{\Gamma\left(\frac{d-2}{2}\right)}} = \frac{\Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right)}{\Gamma(1/2)}}$$

$$= \frac{1}{a^{\frac{d+n+2}{2}}} \frac{d+n}{4} \Gamma\left(\frac{d+n}{2}\right) \pi^{d/2}\, 2^{d-2} \frac{2\cancel{(d-1)}}{d\cancel{(d-1)}\Gamma(d-1)} \frac{\Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}$$

$$= \pi^{\frac{d-1}{2}} \frac{1}{a^{\frac{d+n+2}{2}}} \frac{(d+n)}{d} \frac{\Gamma\left(\frac{d+n}{2}\right)}{\Gamma(d-1)} \Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right) 2^{d-2+1-2}$$

$$= \pi^{\frac{d-1}{2}} 2^{d-3} \frac{d+n}{d} \frac{\Gamma\left(\frac{d+n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right)}{\Gamma(d-1)} \frac{1}{a^{\frac{d+n+2}{2}}} \qquad (6)$$

(5) et (6) permettent ainsi de vérifier (4). # On a aussi l'identité

$$\frac{\Gamma\left(\frac{d+n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{d-1}{2}\right)}{\Gamma(d-1)} = 2^{2-d}\pi^{1/2} \frac{\Gamma\left(\frac{d+n}{2}\right)}{\Gamma(d/2)} \, ,$$

ainsi :

$$M_{ij}^{(a)}[n] = \delta_{ij}\, \pi^{\frac{d\cancel{-1}}{2}} 2^{\cancel{d}-3} \frac{d+n}{d} 2^{2-\cancel{d}} \cancel{\pi^{1/2}} \frac{\Gamma\left(\frac{d+n}{2}\right)}{\Gamma(d/2)} \frac{1}{a^{\frac{d+n+2}{2}}}$$

$$= \delta_{ij}\, \pi^{d/2} \frac{d+n}{2d} \frac{\Gamma\left(\frac{d+n}{2}\right)}{\Gamma(d/2)} \frac{1}{a^{\frac{d+n+2}{2}}} \qquad (7)$$

et :

$$I = -p \frac{2m\beta^2}{d(d+2)v_0} \frac{1}{\pi^{d/2}} K_{ij} \Big[\left(2 + a_2 \frac{d(d+2)}{4}\right) M_{ij}^{(1)}[0] + \left(1 + a_2 \frac{d+2}{8} \overbrace{(d+2(d+2))}^{=3d+4}\right) \delta_{ij} I^{(1)}[2]$$

$$- \left(1 + a_2 \frac{d(d+2)}{8}\right) \frac{d+2}{2} \delta_{ij} I^{(1)}[0] + a_2 M_{ij}^{(1)}[4] + \frac{1}{2} a_2 \delta_{ij} I^{(1)}[6]$$

$$- a_2\, 3\frac{d+2}{4} \delta_{ij} I^{(1)}[4] - a_2 (d+2) M_{ij}^{(1)}[2] \Big]$$

$$= -p\frac{2m\beta^2}{d(d+2)V_0}\frac{1}{\cancel{\pi^{d/2}}} K_{ij} S_{ij} \cancel{\pi^{d/2}}\Big[\left(2+a_2\frac{d(d+2)}{4}\right)\frac{d+0}{2d}\frac{\Gamma(\frac{d+0}{2})}{\Gamma(d/2)} + \left(1+a_2\frac{d+2}{8}(3d+4)\right)\frac{\Gamma(\frac{d+2}{2})}{\Gamma(d/2)} - \left(1+a_2\frac{d(d+2)}{8}\right)\frac{d+2}{2}\frac{\Gamma(\frac{d+0}{2})}{\Gamma(d/2)}$$
$$+a_2\frac{d+4}{2d}\frac{\Gamma(\frac{d+4}{2})}{\Gamma(d/2)} + \frac{1}{2}a_2\frac{\Gamma(\frac{d+6}{2})}{\Gamma(d/2)} - a_2\,3\,\frac{d+2}{4}\frac{\Gamma(\frac{d+4}{2})}{\Gamma(d/2)} - a_2(d+2)\frac{d+2}{2d}\frac{\Gamma(\frac{d+2}{2})}{\Gamma(d/2)}\Big]$$

$$= -p\frac{2m\beta^2}{d(d+2)V_0} K_{ij} S_{ij}\Big[\left(1+a_2\frac{d(d+2)}{8}\right) + \frac{d}{2}\left(1+a_2\frac{d+2}{8}(3d+4)\right) - \frac{d+2}{2}\left(1+a_2\frac{d(d+2)}{8}\right) + a_2\frac{d+4}{2\cancel{d}}\frac{d+2}{2}\frac{\cancel{d}}{2}$$
$$+\frac{1}{2}a_2\frac{d+4}{2}\frac{d+2}{2}\frac{d}{2} - a_2\,3\,\frac{d+2}{4}\frac{d+2}{2}\frac{d}{2} - a_2(d+2)\frac{d+2}{2\cancel{d}}\frac{\cancel{d}}{2}\Big]$$

$$= -p\frac{2m\beta^2}{d(d+2)V_0} Tr(K)\Big[\cancel{1+\frac{d}{2}-\frac{d+2}{2}} + a_2\Big\{\frac{d(d+2)}{8} + \frac{d(d+2)(3d+4)}{16} - \frac{d(d+2)^2}{16} + \frac{(d+2)(d+4)}{8} + \frac{d(d+2)(d+4)}{16}$$
$$-3\frac{d(d+2)^2}{16} - \frac{(d+2)^2}{4}\Big\}\Big]$$

$$= -p\frac{2m\beta^2}{d\cancel{(d+2)}V_0}\cancel{(d+2)}\, Tr(K)\, a_2\Big[\frac{d}{8} + \frac{d(3d+4)}{16} - \frac{d(d+2)}{16} + \frac{d+4}{8} + \frac{d(d+4)}{16} - 3\frac{d(d+2)}{16} - \frac{d+2}{4}\Big]$$

$$= -p\frac{2m\beta^2}{dV_0} Tr(K)\, a_2\,\frac{1}{16}\Big[2d + 3d^2 + 4d - 4d^2 - 8d + 2d + 8 + d^2 + 4d - 4d - 8\Big]$$

$$= 0$$

Conclusion : $\boxed{\nu^{*a'}_{\kappa} = \nu^{*a'}_{\mu} = 0}$ (8)

Vérification du terme ν^{*a} :

$$\nu^{*a} = \frac{2m\beta^3}{d(d+2)nV_0}\int_{\mathbb{R}^d} dV\, S_i(V)\, L_a[\mathcal{M}S_i]$$

$$\overset{\text{lemme}}{=} \frac{2m\beta^3}{d(d+2)nV_0}\sigma^{d-1}\beta_1\int_{\mathbb{R}^{2d}} dV_1 dV_2\, |V_{12}|\, f^{(0)}(V_1)\mathcal{M}(V_2)\, S_i(V_2)\left[S_i(V_1)+S_i(V_2)\right]$$

$$= \frac{2m\beta^3}{d(d+2)nV_0}\sigma^{d-1}\beta_1\int_{\mathbb{R}^{2d}} dV_1 dV_2\, |V_{12}|\,\frac{n}{V_T^d}\frac{1}{\pi^{d/2}}e^{-V_1^2/V_T^2}\left[1+a_2S_2\left(\frac{V_1^2}{V_T^2}\right)\right]\frac{n}{V_T^d}\frac{1}{\pi^{d/2}}e^{-V_2^2/V_T^2}\times$$
$$\times\Big[\left(\frac{m}{2}V_2^2-\frac{d+2}{2}k_BT\right)^2\underbrace{V_{2i}^2}_{=V_2^2} + \left(\frac{m}{2}V_2^2-\frac{d+2}{2}k_BT\right)\left(\frac{m}{2}V_1^2-\frac{d+2}{2}k_BT\right)\underbrace{V_{2i}V_{1i}}_{=V_1\cdot V_2}\Big] \quad ; \quad V_T=\sqrt{\frac{2}{\beta m}}$$

$$= \frac{2m\beta^3}{d(d+2)nV_0}\sigma^{d-1}\beta_1\int_{\mathbb{R}^{2d}} dV_1 dV_2\, |V_{12}|\,\frac{n}{V_T^d}\frac{1}{\pi^{d/2}}e^{-V_1^2/V_T^2}\left[1+a_2S_2\left(\frac{V_1^2}{V_T^2}\right)\right]\frac{n}{V_T^d}\frac{1}{\pi^{d/2}}e^{-V_2^2/V_T^2}$$
$$\times\Big[m^2V_2^2\left(\frac{1}{2}V_2^2-\frac{d+2}{2}\frac{1}{2}\frac{2}{\beta m}\right)^2 + m^2 V_1\cdot V_2\left(\frac{1}{2}V_2^2-\frac{d+2}{4}V_T^2\right)\left(\frac{1}{2}V_1^2-\frac{d+2}{4}V_T^2\right)\Big]$$

$$= \frac{2m\beta^3}{d(d+2)nV_0}\sigma^{d-1}\beta_1\int_{\mathbb{R}^{2d}} dV_1 dV_2\, |V_{12}|\,\frac{n}{V_T^d}\frac{1}{\pi^{d/2}}e^{-V_1^2/V_T^2}\left[1+a_2S_2\left(\frac{V_1^2}{V_T^2}\right)\right]\frac{n}{V_T^d}\frac{1}{\pi^{d/2}}e^{-V_2^2/V_T^2}$$
$$\times\Big[\frac{m^2}{4}V_2^2\left(V_2^2-\frac{d+2}{2}V_T^2\right)^2 + \frac{m^2}{4}V_1\cdot V_2\left(V_2^2-\frac{d+2}{2}V_T^2\right)\left(V_1^2-\frac{d+2}{2}V_T^2\right)\Big]$$

$$= \frac{2m\beta^3}{d(d+2)\cancel{n}V_0}\sigma^{d-1}\beta_1\frac{m^2}{4}\frac{\cancel{n}}{\cancel{V_T^d}}\frac{1}{\pi^{d/2}}\frac{n}{\cancel{V_T^d}}\frac{1}{\pi^{d/2}}\int_{\mathbb{R}^{2d}} dc_1dc_2\,|c_{12}|\,V_T\cancel{V_T^{2d}}e^{-c_1^2}e^{-c_2^2}\left[1+a_2S_2(c_1^2)\right]\times$$
$$\times\Big[V_T^2c_2^2\left(V_T^2c_2^2-\frac{d+2}{2}V_T^2\right)^2 + V_T^2\,c_1\cdot c_2\left(V_T^2c_2^2-\frac{d+2}{2}V_T^2\right)\left(V_T^2c_1^2-\frac{d+2}{2}V_T^2\right)\Big]$$

$$= \frac{m^3\beta^3}{2d(d+2)V_0}\sigma^{d-1}\beta_1\frac{n}{\pi^d}V_T^7\int_{\mathbb{R}^{2d}} dc_1dc_2\,|c_{12}|\,e^{-c_1^2-c_2^2}\left[1+a_2S_2(c_1^2)\right]\Big[c_2^2\left(c_2^2-\frac{d+2}{2}\right)^2 + c_1\cdot c_2\left(c_2^2-\frac{d+2}{2}\right)\left(c_1^2-\frac{d+2}{2}\right)\Big]$$

$$= \frac{\cancel{m^3\beta^3}}{2d(d+2)V_0}\sigma^{d-1}\beta_1\frac{n}{\pi^d}\frac{8}{\cancel{m^3\beta^3}}\sqrt{\frac{2}{\beta m}}\int_{\mathbb{R}^{2d}} dc_1dc_2\,|c_{12}|\,e^{-c_1^2-c_2^2}\left[1+a_2S_2(c_1^2)\right]\times$$
$$\times\Big[c_2^6 + \frac{(d+2)^2}{4}c_2^2 - (d+2)c_2^4 + (c_1\cdot c_2)\Big\{c_1^2c_2^2 - \frac{d+2}{2}(c_1^2+c_2^2) + \frac{(d+2)^2}{4}\Big\}\Big]$$

$$= \frac{\sigma^{d-1}\beta_1 n 4}{d(d+2)V_0\pi^d}\sqrt{\frac{2}{\beta m}}\int_{\mathbb{R}^{2d}} dc_1 dc_2\,|c_{12}|\,e^{-c_1^2-c_2^2}\left[1+a_2\left\{\frac12 c_1^4-\frac{d+2}{2}c_1^2+\frac{d(d+2)}{8}\right\}\right]\times$$

$$\times\left[c_2^6+\frac{(d+2)^2}{4}c_2^2-(d+2)c_2^4+(c_1\cdot c_2)c_1^2c_2^2-\frac{d+2}{2}(c_1\cdot c_2)(c_1^2+c_2^2)+(c_1\cdot c_2)\frac{(d+2)^2}{4}\right]$$

$$= \frac{4\sigma^{d-1}\beta_1 n}{d(d+2)V_0\pi^d}\sqrt{\frac{2}{\beta m}}\int_{\mathbb{R}^{2d}} dc_1 dc_2\,|c_{12}|\,e^{-c_1^2-c_2^2}\Big[$$

$$\left(1+a_2\frac{d(d+2)}{8}\right)\left\{c_2^6+\frac{(d+2)^2}{4}c_2^2-(d+2)c_2^4+(c_1\cdot c_2)c_1^2c_2^2-\frac{d+2}{2}(c_1\cdot c_2)(c_1^2+c_2^2)+(c_1\cdot c_2)\frac{(d+2)^2}{4}\right\}$$

$$+\frac12 a_2\left\{c_1^4c_2^6+\frac{(d+2)^2}{4}c_1^4c_2^2-(d+2)c_1^4c_2^4+(c_1\cdot c_2)c_1^6c_2^2-\frac{d+2}{2}(c_1\cdot c_2)c_1^6-\frac{d+2}{2}(c_1\cdot c_2)c_1^4c_2^2+(c_1\cdot c_2)\frac{(d+2)^2}{4}c_1^4\right\}$$

$$-\frac{d+2}{2}a_2\left\{c_1^2c_2^6+\frac{(d+2)^2}{4}c_1^2c_2^2-(d+2)c_1^2c_2^4+(c_1\cdot c_2)c_1^4c_2^2-\frac{d+2}{2}(c_1\cdot c_1)c_1^4-\frac{d+2}{2}(c_1\cdot c_2)c_1^2c_2^2+(c_1\cdot c_2)\frac{(d+2)^2}{4}c_1^2\right\}\Big] \quad (9)$$

proportionnel

Coordonnées du centre de masse et relative: $c_1 = C + \frac12 c_{12}$; $c_2 = C - \frac12 c_{12}$

$c_1^2+c_2^2 = 2C^2+\frac12 c_{12}^2$ ✓

$$c_2^6 = (C\mp\tfrac12 c_{12})^6 = (C\mp\tfrac12 c_{12})^4(C^2+\tfrac14 c_{12}^2\mp C\cdot c_{12})$$
$$= (C^2+\tfrac14 c_{12}^2\mp C\cdot c_{12})\left[(C^2+\tfrac14 c_{12}^2)^2+(C\cdot c_{12})^2\mp 2(C\cdot c_{12})(C^2+\tfrac14 c_{12}^2)\right]$$
$$= (C^2+\tfrac14 c_{12}^2)^3+(C\cdot c_{12})^2(C^2+\tfrac14 c_{12}^2)\mp 2(C\cdot c_{12})(C^2+\tfrac14 c_{12}^2)^2$$
$$\mp(C\cdot c_{12})(C^2+\tfrac14 c_{12}^2)^2\mp(C\cdot c_{12})^3+2(C\cdot c_{12})^2(C^2+\tfrac14 c_{12}^2)$$
$$= (C^2+\tfrac14 c_{12}^2)^3+3(C\cdot c_{12})^2(C^2+\tfrac14 c_{12}^2)\mp 3(C\cdot c_{12})(C^2+\tfrac14 c_{12}^2)^2\mp(C\cdot c_{12})^3 \quad \text{impair}$$
$$= (C^2+\tfrac14 c_{12}^2)^3+3(C\cdot c_{12})^2(C^2+\tfrac14 c_{12}^2) \ ✓$$

$$c_2^4 = (C\mp\tfrac12 c_{12})^4 = (C^2+\tfrac14 c_{12}^2)^2+(C\cdot c_{12})^2\mp 2(C\cdot c_{12})(C^2+\tfrac14 c_{12}^2) \quad \text{impair}$$
$$= (C^2+\tfrac14 c_{12}^2)^2+(C\cdot c_{12})^2 \ ✓$$

$$c_1^2c_2^2 = (C^2+\tfrac14 c_{12}^2+C\cdot c_{12})(C^2+\tfrac14 c_{12}^2-C\cdot c_{12}) = (C^2+\tfrac14 c_{12}^2)^2-(C\cdot c_{12})^2 \ ✓$$

$$c_1\cdot c_2 = C^2-\tfrac14 c_{12}^2 \ ✓$$

$$(c_1\cdot c_2)c_1^2c_2^2 = (C^2+\tfrac14 c_{12}^2)^2(C^2-\tfrac14 c_{12}^2)-(C\cdot c_{12})^2(C^2-\tfrac14 c_{12}^2) \ ✓$$

$$(c_1\cdot c_2)(c_1^2+c_2^2) = (C^2-\tfrac14 c_{12}^2)(2C^2+\tfrac12 c_{12}^2) = 2C^4+\tfrac12 c_{12}^2C^2-\tfrac12 C^2c_{12}^2-\tfrac18 c_{12}^4 = 2C^4-\tfrac18 c_{12}^4$$

$$c_1^4c_2^6 = \left[(C^2+\tfrac14 c_{12}^2)^2+(C\cdot c_{12})^2+2(C\cdot c_{12})(C^2+\tfrac14 c_{12}^2)\right]\left[(C^2+\tfrac14 c_{12}^2)^3+3(C\cdot c_{12})^2(C^2+\tfrac14 c_{12}^2)-3(C\cdot c_{12})(C^2+\tfrac14 c_{12}^2)^2-(C\cdot c_{12})^3\right]$$
$$= (C^2+\tfrac14 c_{12}^2)^5+3(C\cdot c_{12})^2(C^2+\tfrac14 c_{12}^2)^3-3(C\cdot c_{12})(C^2+\tfrac14 c_{12}^2)^4-(C\cdot c_{12})^3(C^2+\tfrac14 c_{12}^2)^2$$
$$+(C\cdot c_{12})^2(C^2+\tfrac14 c_{12}^2)^3+3(C\cdot c_{12})^4(C^2+\tfrac14 c_{12}^2)-3(C\cdot c_{12})^3(C^2+\tfrac14 c_{12}^2)^2-(C\cdot c_{12})^5$$
$$+2(C\cdot c_{12})(C^2+\tfrac14 c_{12}^2)^4+3(C\cdot c_{12})^3\cdot 2\cdot(C^2+\tfrac14 c_{12}^2)^2-3\cdot 2(C\cdot c_{12})^2(C^2+\tfrac14 c_{12}^2)^3-2(C\cdot c_{12})^4(C^2+\tfrac14 c_{12}^2)$$
$$= (C^2+\tfrac14 c_{12}^2)^5+(C\cdot c_{12})^4\left[-2(C^2+\tfrac14 c_{12}^2)+3(C^2+\tfrac14 c_{12}^2)\right]$$
$$+(C\cdot c_{12})^2\left[3(C^2+\tfrac14 c_{12}^2)^3+(C^2+\tfrac14 c_{12}^2)^3-6(C^2+\tfrac14 c_{12}^2)^3\right]$$
$$= (C^2+\tfrac14 c_{12}^2)^5+(C\cdot c_{12})^4(C^2+\tfrac14 c_{12}^2)-2(C\cdot c_{12})^2(C^2+\tfrac14 c_{12}^2)^3$$

$$c_1^4c_2^2 = \left[(C^2+\tfrac14 c_{12}^2)^2+(C\cdot c_{12})^2\pm 2(C\cdot c_{12})(C^2+\tfrac14 c_{12}^2)\right](C^2+\tfrac14 c_{12}^2\mp(C\cdot c_{12}))$$
$$= (C^2+\tfrac14 c_{12}^2)^3+(C\cdot c_{12})^2(C^2+\tfrac14 c_{12}^2)\pm 2(C\cdot c_{12})(C^2+\tfrac14 c_{12}^2)^2\mp(C\cdot c_{12})(C^2+\tfrac14 c_{12}^2)^2\mp(C\cdot c_{12})^3$$
$$-2(C\cdot c_{12})^2(C^2+\tfrac14 c_{12}^2)$$
$$= (C^2+\tfrac14 c_{12}^2)^3-(C\cdot c_{12})^2(C^2+\tfrac14 c_{12}^2) \ ✓$$

$$c_1^4c_2^4 = \left[(C^2+\tfrac14 c_{12}^2)^2+(C\cdot c_{12})^2+2(C\cdot c_{12})(C^2+\tfrac14 c_{12}^2)\right]\left[(C^2+\tfrac14 c_{12}^2)^2+(C\cdot c_{12})^2-2(C\cdot c_{12})(C^2+\tfrac14 c_{12}^2)\right]$$
$$= (C^2+\tfrac14 c_{12}^2)^4+(C\cdot c_{12})^2(C^2+\tfrac14 c_{12}^2)^2-2(C\cdot c_{12})^3(C^2+\tfrac14 c_{12}^2)+(C\cdot c_{12})^2(C^2+\tfrac14 c_{12}^2)^2+(C\cdot c_{12})^4$$
$$-2(C\cdot c_{12})^3(C^2+\tfrac14 c_{12}^2)+2(C\cdot c_{12})(C^2+\tfrac14 c_{12}^2)^3+2(C\cdot c_{12})^3(C^2+\tfrac14 c_{12}^2)-4(C\cdot c_{12})^2(C^2+\tfrac14 c_{12}^2)^2$$
$$= (C^2+\tfrac14 c_{12}^2)^4-2(C\cdot c_{12})^2(C^2+\tfrac14 c_{12}^2)^2+(C\cdot c_{12})^4 \ ✓$$

$$C_1^6 C_2^2 = \left[(C^2+1/4\,C_{12}^2)^3 + 3(C\cdot C_{12})^2(C^2+1/4\,C_{12}^2) + 3(C\cdot C_{12})(C^2+1/4\,C_{12}^2)^2 + (C\cdot C_{12})^3\right]\left[C^2+1/4\,C_{12}^2 - (C\cdot C_{12})\right]$$

$$= (C^2+1/4\,C_{12}^2)^4 + 3(C\cdot C_{12})^2(C^2+1/4\,C_{12}^2)^2 + 3(C\cdot C_{12})(C^2+1/4\,C_{12}^2)^2 + (C\cdot C_{12})^3(C^2+1/4\,C_{12}^2)$$
$$- (C\cdot C_{12})(C^2+1/4\,C_{12}^2)^3 - 3(C\cdot C_{12})^3(C^2+1/4\,C_{12}^2) - 3(C\cdot C_{12})^2(C^2+1/4\,C_{12}^2)^2 - (C\cdot C_{12})^4$$

$$= (C^2+1/4\,C_{12}^2)^4 - (C\cdot C_{12})^4 \quad ✓$$

$$(C_1\cdot C_2)C_1^4C_2^2 = (C^2-1/4\,C_{12}^2)\left[(C^2+1/4\,C_{12}^2)^3 - (C\cdot C_{12})^2(C^2+1/4\,C_{12}^2)\right]$$
$$= (C^2-1/4\,C_{12}^2)(C^2+1/4\,C_{12}^2)^3 - (C\cdot C_{12})^2(C^2-1/4\,C_{12}^2)(C^2+1/4\,C_{12}^2)$$

$$(C_1\cdot C_2)C_1^4 = (C^2-1/4\,C_{12}^2)\left[(C^2+1/4\,C_{12}^2)^2 + (C\cdot C_{12})^2\right]$$
$$= (C^2-1/4\,C_{12}^2)(C^2+1/4\,C_{12}^2)^2 + (C^2-1/4\,C_{12}^2)(C\cdot C_{12})^2 \quad ✓$$

$$(C_1\cdot C_2)C_1^6C_2^2 = (C^2-1/4\,C_{12}^2)\left[(C^2+1/4\,C_{12}^2)^4 - (C\cdot C_{12})^4\right]$$
$$= (C^2-1/4\,C_{12}^2)(C^2+1/4\,C_{12}^2)^4 - (C\cdot C_{12})^4(C^2-1/4\,C_{12}^2)$$

$$(C_1\cdot C_2)C_1^6 = (C^2-1/4\,C_{12}^2)\left[(C^2+1/4\,C_{12}^2)^3 + 3(C\cdot C_{12})^2(C^2+1/4\,C_{12}^2)\right]$$
$$= (C^2-1/4\,C_{12}^2)(C^2+1/4\,C_{12}^2)^3 + 3(C\cdot C_{12})^2(C^2+1/4\,C_{12}^2)(C^2-1/4\,C_{12}^2)$$

$$(C_1\cdot C_2)C_1^2 = (C^2-1/4\,C_{12}^2)(C^2+1/4\,C_{12}^2 + C\cdot C_{12})$$
$$= (C^2-1/4\,C_{12}^2)(C^2+1/4\,C_{12}^2)$$
$$= C^4 - \frac{1}{16}C_{12}^4$$
$$= \frac12\left(2C^4 - \frac18 C_{12}^4\right)$$
$$= \frac12 (C_1\cdot C_2)(C_1^2+C_2^2)$$

Regroupons les termes de (9) :

$$\nu^{*a} = \frac{4\sigma^{d-1}\beta_1 n}{d(d+2)\nu_0\pi^d}\sqrt{\frac{2}{\beta m}}\int_{\mathbb{R}^{2d}} dc_1dc_2\,|c_{12}|\,e^{-c_1^2-c_2^2}\Big[\left(1+a_2\frac{d(d+2)}{8}\right)c_2^6 + \left(1+a_2\frac{d(d+2)}{8}\right)\frac{(d+2)^2}{4}c_2^2$$
$$+\left(1+\underbrace{a_2\frac{d(d+2)}{8}+a_2\frac{(d+2)^2}{4}}_{=a_2\frac{d+2}{8}(d+2d+4)}\right)(c_1\cdot c_2)c_1^2c_2^2 + \left(\underbrace{-\frac{d+2}{2}\left(1+a_2\frac{d(d+2)}{8}\right) - \frac{d+2}{2}a_2\frac{(d+2)^2}{4}\frac12}_{=-\frac{d+2}{2}\left(1+a_2\frac{d(d+2)}{8}+a_2\frac{(d+2)^2}{8}\right)=-\frac{d+2}{2}\left(1+a_2\frac{d+2}{8}(d+d+2)\right)}\right)(c_1\cdot c_2)(c_1^2+c_2^2)$$
$$+\left(1+a_2\frac{d(d+2)}{8}\right)\frac{(d+2)^2}{4}(c_1\cdot c_2) + \frac12 a_2 c_1^4c_2^6 + \left(\underbrace{\frac12 a_2\frac{(d+2)^2}{4} + \frac{d+2}{2}a_2(d+2)}_{=a_2\frac{(d+2)^2}{2}\left(1+\frac14\right)}\right)c_1^4c_2^2$$
$$-\frac{d+2}{2}a_2 c_1^4c_2^4 + \frac12 a_2(c_1\cdot c_2)c_1^6c_2^2 - \frac12 a_2\frac{d+2}{2}(c_1\cdot c_2)c_1^6$$
$$+\left(\overbrace{\frac12 a_2\left(-\frac{d+2}{2}\right) - \frac{d+2}{2}a_2}^{=-a_2\frac{d+2}{2}\left(1+\frac12\right)}\right)(c_1\cdot c_2)c_1^4c_2^2 + \left(\underbrace{\frac12 a_2\frac{(d+2)^2}{4} + \frac{d+2}{2}a_2\frac{d+2}{2}}_{=a_2\frac{(d+2)^2}{4}\left(1+\frac12\right)}\right)(c_1\cdot c_2)c_1^4$$
$$-\frac{d+2}{2}a_2 c_1^2c_2^6 - \frac{d+2}{2}\frac{(d+2)^2}{4}c_1^2c_2^2a_2\Big]$$

$$= \frac{4\sigma^{d-1}\beta_1 n}{d(d+2)\nu_0\pi^d}\sqrt{\frac{2}{\beta m}}\int_{\mathbb{R}^{2d}} dc_1dc_2\,|c_{12}|\,e^{-c_1^2-c_2^2}\Big[\left(1+a_2\frac{d(d+2)}{8}\right)c_2^6 + \left(1+a_2\frac{d(d+2)}{8}\right)\frac{(d+2)^2}{4}c_2^2$$
$$+\left(1+a_2\frac{(d+2)(3d+4)}{8}\right)(c_1\cdot c_2)c_1^2c_2^2 - \frac{d+2}{2}\left(1+a_2\frac{(d+2)(d+1)}{4}\right)(c_1\cdot c_2)(c_1^2+c_2^2)$$
$$+\left(1+a_2\frac{d(d+2)}{8}\right)\frac{(d+2)^2}{4}(c_1\cdot c_2) + \frac12 a_2 c_1^4c_2^6 + a_2\,5\,\frac{(d+2)^2}{8}c_1^4c_2^2$$
$$-\frac{d+2}{2}a_2c_1^4c_2^4 + \frac12 a_2(c_1\cdot c_2)c_1^6c_2^2 - \frac12 a_2\frac{d+2}{2}(c_1\cdot c_2)c_1^6 - a_2\,3\,\frac{d+2}{4}(c_1\cdot c_2)c_1^4c_2^2$$
$$+a_2\,3\,\frac{(d+2)^2}{8}(c_1\cdot c_2)c_1^4 - a_2\frac{d+2}{2}c_1^2c_2^6 - \frac{(d+2)^3}{8}c_1^2c_2^2a_2\Big] \qquad (10)$$

On utilise $(c\cdot c_{12})^4 = \frac{3}{d^2}c^4c_{12}^4 - 2d\, c_j^4 c_{12j}^4$ pour obtenir (relation vérifiée à la main) :

$$c_2^6 = \left(c^2+\tfrac{1}{4}c_{12}^2\right)^3 + 3\,\frac{1}{d}c^2c_{12}^2\left(c^2+\tfrac{1}{4}c_{12}^2\right)$$

$$c_2^2 = c^2+\tfrac{1}{4}c_{12}^2$$

$$(c_1\cdot c_2)\,c_1^2c_2^2 = \left(c^2+\tfrac{1}{4}c_{12}^2\right)\left(c^2-\tfrac{1}{4}c_{12}^2\right) - \frac{1}{d}c^2c_{12}^2\left(c^2-\tfrac{1}{4}c_{12}^2\right)$$

$$(c_1\cdot c_2)(c_1^2+c_2^2) = 2c^4-\tfrac{1}{8}c_{12}^4$$

$$(c_1\cdot c_2) = c^2-\tfrac{1}{4}c_{12}^2$$

$$c_1^4c_2^6 = \left(c^2+\tfrac{1}{4}c_{12}^2\right)^5 + \left(\frac{3}{d^2}c^4c_{12}^4-2d\,c_j^4c_{12j}^4\right)\left(c^2+\tfrac{1}{4}c_{12}^2\right) - \frac{2}{d}c^2c_{12}^2\left(c^2+\tfrac{1}{4}c_{12}^2\right)^3$$

$$c_1^4c_2^2 = \left(c^2+\tfrac{1}{4}c_{12}^2\right)^3 - \frac{1}{d}c^2c_{12}^2\left(c^2+\tfrac{1}{4}c_{12}^2\right)$$

$$c_1^4c_2^4 = \left(c^2+\tfrac{1}{4}c_{12}^2\right)^4 - \frac{2}{d}c^2c_{12}^2\left(c^2+\tfrac{1}{4}c_{12}^2\right)^2 + \frac{3}{d^2}c^4c_{12}^4 - 2d\,c_j^4c_{12j}^4$$

$$(c_1\cdot c_2)\,c_1^6c_2^2 = \left(c^2-\tfrac{1}{4}c_{12}^2\right)\left(c^2+\tfrac{1}{4}c_{12}^4\right) - \left(\frac{3}{d^2}c^4c_{12}^4-2d\,c_j^4c_{12j}^4\right)\left(c^2-\tfrac{1}{4}c_{12}^2\right)$$

$$(c_1\cdot c_2)\,c_1^6 = \left(c^2-\tfrac{1}{4}c_{12}^2\right)\left(c^2+\tfrac{1}{4}c_{12}^2\right)^3 + \frac{3}{d}c^2c_{12}^2\left(c^2+\tfrac{1}{4}c_{12}^2\right)\left(c^2-\tfrac{1}{4}c_{12}^2\right)$$

$$(c_1\cdot c_2)\,c_1^4c_2^2 = \left(c^2-\tfrac{1}{4}c_{12}^2\right)\left(c^2+\tfrac{1}{4}c_{12}^2\right)^3 - \frac{1}{d}c^2c_{12}^2\left(c^2-\tfrac{1}{4}c_{12}^2\right)\left(c^2+\tfrac{1}{4}c_{12}^2\right)$$

$$(c_1\cdot c_2)\,c_1^4 = \left(c^2-\tfrac{1}{4}c_{12}^2\right)\left(c^2+\tfrac{1}{4}c_{12}^2\right)^2 + \frac{1}{d}c^2c_{12}^2\left(c^2-\tfrac{1}{4}c_{12}^2\right)$$

$$c_1^2c_2^6 = \left(c^2+\tfrac{1}{4}c_{12}^2\right)^4 - \frac{3}{d^2}c^4c_{12}^4 + 2d\,c_j^4c_{12j}^4$$

$$c_1^2c_2^2 = \left(c^2+\tfrac{1}{4}c_{12}^2\right)^2 - \frac{1}{d}c^2c_{12}^2$$

On substitue ces dernières expressions dans (10) :

$$\begin{aligned}
\nu^{*a} = {} & \frac{4\sigma^{d-1}\beta_1 n}{d(d+2)V_0\pi^d}\sqrt{\frac{2}{\beta m}}\int_{\mathbb{R}^{2d}} dc\,dc_{12}\,|c_{12}|\,e^{-2c^2}e^{-c_{12}^2/2}\Big[\left(1+a_2\frac{d(d+2)}{8}\right)\left(c^2+\tfrac{1}{4}c_{12}^2\right)^3 + \left(1+a_2\frac{d(d+2)}{8}\right)\frac{3}{d}c^2c_{12}^2\left(c^2+\tfrac{1}{4}c_{12}^2\right) \\
& + \frac{(d+2)^2}{4}\left(1+a_2\frac{d(d+2)}{8}\right)\left(c^2+\tfrac{1}{4}c_{12}^2\right) + \left(1+a_2\frac{(d+2)(3d+4)}{8}\right)\left(c^2+\tfrac{1}{4}c_{12}^2\right)\left(c^2-\tfrac{1}{4}c_{12}^2\right) \\
& - \left(1+a_2\frac{(d+2)(3d+4)}{8}\right)\frac{1}{d}c^2c_{12}^2\left(c^2-\tfrac{1}{4}c_{12}^2\right) - \frac{d+2}{2}\left(1+a_2\frac{(d+2)(d+1)}{4}\right)\left(2c^4-\tfrac{1}{8}c_{12}^4\right) \\
& + \left(1+a_2\frac{d(d+2)}{8}\right)\frac{(d+2)^2}{4}\left(c^2-\tfrac{1}{4}c_{12}^2\right) + \frac{1}{2}a_2\left(c^2+\tfrac{1}{4}c_{12}^2\right)^5 + \frac{1}{2}a_2\left(\frac{3}{d^2}c^4c_{12}^4-2d\,c_j^4c_{12j}^4\right)\left(c^2+\tfrac{1}{4}c_{12}^2\right) \\
& - \frac{1}{2}a_2\frac{2}{d}c^2c_{12}^2\left(c^2+\tfrac{1}{4}c_{12}^2\right)^3 + a_2\,5\frac{(d+2)^2}{8}\left(c^2+\tfrac{1}{4}c_{12}^2\right)^3 - a_2\,5\frac{(d+2)^2}{8}\frac{1}{d}c^2c_{12}^2\left(c^2+\tfrac{1}{4}c_{12}^2\right) \\
& - \frac{d+2}{2}a_2\left(c^2+\tfrac{1}{4}c_{12}^2\right) + \frac{d+2}{2}\frac{2}{d}c^2c_{12}^2\left(c^2+\tfrac{1}{4}c_{12}^2\right)^2 - \frac{d+2}{2}a_2\frac{3}{d^2}c^4c_{12}^4 + \frac{d+2}{2}a_2\,2d\,c_j^4c_{12j}^4 \\
& + \frac{1}{2}a_2\left(c^2-\tfrac{1}{4}c_{12}^2\right)\left(c^2+\tfrac{1}{4}c_{12}^4\right) - \frac{1}{2}a_2\left(\frac{3}{d^2}c^4c_{12}^4-2d\,c_j^4c_{12j}^4\right)\left(c^2-\tfrac{1}{4}c_{12}^2\right) \\
& - \frac{1}{2}a_2\frac{d+2}{2}\left(c^2-\tfrac{1}{4}c_{12}^2\right)\left(c^2+\tfrac{1}{4}c_{12}^2\right)^3 - \frac{1}{2}a_2\frac{d+2}{2}\frac{3}{d}c^2c_{12}^2\left(c^2+\tfrac{1}{4}c_{12}^2\right)\left(c^2-\tfrac{1}{4}c_{12}^2\right) \\
& - a_2\,3\frac{d+2}{4}\left(c^2-\tfrac{1}{4}c_{12}^2\right)\left(c^2+\tfrac{1}{4}c_{12}^2\right)^3 + a_2\,3\frac{d+2}{4}\frac{1}{d}c^2c_{12}^2\left(c^2+\tfrac{1}{4}c_{12}^2\right)\left(c^2-\tfrac{1}{4}c_{12}^2\right) \\
& + a_2\,3\frac{(d+2)^2}{8}\left(c^2-\tfrac{1}{4}c_{12}^2\right)\left(c^2+\tfrac{1}{4}c_{12}^2\right) + a_2\,3\frac{(d+2)^2}{8}\frac{1}{d}c^2c_{12}^2\left(c^2-\tfrac{1}{4}c_{12}^2\right) \\
& - a_2\frac{d+2}{2}\left(c^2+\tfrac{1}{4}c_{12}^2\right)^4 + a_2\frac{d+2}{2}\frac{3}{d^2}c^4c_{12}^4 - a_2\frac{d+2}{2}2d\,c_j^4c_{12j}^4 - \frac{(d+2)^3}{8}\left(c^2+\tfrac{1}{4}c_{12}^2\right)^2 + \frac{(d+2)^3}{8}a_2\frac{1}{d}c^2c_{12}^2\Big]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
= {} & \frac{4\sigma^{d-1}\beta_1 n}{d(d+2)V_0\pi^d}\sqrt{\frac{2}{\beta m}}\int_{\mathbb{R}^{2d}} dc\,dc_{12}\,|c_{12}|\,e^{-2c^2}e^{-c_{12}^2/2}\Big[\left(c^2+\tfrac{1}{4}c_{12}^2\right)^3\left(1+a_2\frac{d(d+2)}{8}+a_2\,5\frac{(d+2)^2}{8}\right) \\
& + \frac{1}{d}c^2c_{12}^2\left(c^2+\tfrac{1}{4}c_{12}^2\right)\left(3+a_2\,3\frac{d(d+2)}{8}-a_2\,5\frac{(d+2)^2}{8}\right) + \left(c^2+\tfrac{1}{4}c_{12}^2\right)\frac{d+2}{2}\left(\frac{d+2}{2}+a_2\frac{d(d+2)^2}{16}-a_2\right) \\
& + \left(c^2+\tfrac{1}{4}c_{12}^2\right)\left(c^2-\tfrac{1}{4}c_{12}^2\right)\left(1+a_2\frac{(d+2)(3d+4)}{8}+\frac{1}{2}a_2+a_2\,3\frac{(d+2)^2}{8}\right) \\
& + \frac{1}{d}c^2c_{12}^2\left(c^2-\tfrac{1}{4}c_{12}^2\right)\left(a_2\frac{3(d+2)^2}{8}-1-a_2\frac{(d+2)(3d+4)}{8}\right) - \frac{d+2}{2}\left(1+a_2\frac{(d+2)(d+1)}{4}\right)\left(2c^4-\tfrac{1}{8}c_{12}^4\right) \\
& + \left(1+a_2\frac{d(d+2)}{8}\right)\frac{(d+2)^2}{4}\left(c^2-\tfrac{1}{4}c_{12}^2\right) + \frac{1}{2}a_2\left(c^2+\tfrac{1}{4}c_{12}^2\right)^5 + \left(\frac{3}{d^2}c^4c_{12}^4-2d\,c_j^4c_{12j}^4\right)a_2\frac{1}{4}c_{12}^2 \\
& - a_2\frac{1}{d}c^2c_{12}^2\left(c^2+\tfrac{1}{4}c_{12}^2\right)^3 + \frac{d+2}{d}c^2c_{12}^2\left(c^2+\tfrac{1}{4}c_{12}^2\right)^2 + 0 + 0 - a_2\frac{d+2}{4}4\left(c^2-\tfrac{1}{4}c_{12}^2\right)\left(c^2+\tfrac{1}{4}c_{12}^2\right)^3 + 0 \\
& - a_2\frac{d+2}{2}\left(c^2+\tfrac{1}{4}c_{12}^2\right)^4 - \frac{(d+2)^3}{8}\left(c^2+\tfrac{1}{4}c_{12}^2\right)^2 + \frac{(d+2)^3}{8}a_2\frac{1}{d}c^2c_{12}^2\Big]
\end{aligned}$$

$= a_2\frac{d+2}{8}(d+5d+10) = a_2\frac{d+2}{8}(6d+10) = a_2\frac{d+2}{4}(3d+5)$

$= c^4-\frac{1}{16}c_{12}^4 = \frac{1}{2}\left(2c^4-\frac{1}{8}c_{12}^4\right)$

$a_2\frac{d+2}{8}(3d-5d-10) = a_2\frac{d+2}{8}(-2d-10) = -a_2\frac{d+2}{4}(d+5)$

$= a_2\frac{d+2}{8}(3d+6-3d-4) = a_2\frac{d+2}{8}2 = a_2\frac{d+2}{4}$

$= a_2\frac{d+2}{8}(3d+4+3d+6)+\frac{a_2}{2} = a_2\frac{d+2}{4}(3d+5)+\frac{a_2}{2}$

$$= \frac{4\sigma^{d-1}\beta_1 n}{d(d+2)V_0\pi^d}\sqrt{\frac{2}{\beta m}}\int_{\mathbb{R}^{2d}} dc\,dc_{12}\,|c_{12}|\,e^{-2c^2}e^{-c_{12}^2/2}\Big[\left(c^2+\tfrac14 c_{12}^2\right)^3\left(1+a_2\tfrac{d+2}{4}(3d+5)\right)+\tfrac1d c^2c_{12}^2\left(c^2+\tfrac14 c_{12}^2\right)\left(3-a_2\tfrac{d+2}{4}(d+5)\right)$$

$$\to \tfrac1d c^4c_{12}^2\left(2-a_2\tfrac{d+2}{4}(d+4)\right)+\tfrac1d c^2c_{12}^4\left(4-a_2\tfrac{d+2}{4}(d+6)\right)$$

$$+\,c^2\frac{d+2}{2}\underbrace{\left(\frac{d+2}{2}+a_2\frac{d(d+2)^2}{16}-a_2+\frac{d+2}{2}+a_2\frac{d(d+2)^2}{16}\right)}_{=\,d+2+a_2\frac{d(d+2)^2}{8}-a_2}+\frac14 c_{12}^2\frac{d+2}{2}(-a_2)$$

$$+\left(2c^4-\tfrac18 c_{12}^4\right)\left(\frac12+a_2\frac{d+2}{8}(3d+5)+a_2\frac14-\frac{d+2}{2}-a_2\frac{(d+2)^2(d+1)}{8}\right)+\tfrac1d c^2c_{12}^2\left(c^2-\tfrac14 c_{12}^2\right)\left(-1+a_2\tfrac{d+2}{4}\right)$$

$$+\tfrac12 a_2\left(c^2+1/4c_{12}^2\right)^5+\tfrac14 a_2c_{12}^2\left(\tfrac{3}{d^2}c^4c_{12}^4-2d\,c_j^4c_{12j}^4\right)-a_2\tfrac1d c^2c_{12}^2\left(c^2+1/4c_{12}^2\right)^3$$

$$+\frac{d+2}{d}c^2c_{12}^2\left(c^2+1/4c_{12}^2\right)^2-a_2(d+2)\left(c^2-1/4c_{12}^2\right)\left(c^2+1/4c_{12}^2\right)^3-a_2\frac{d+2}{2}\left(c^2+1/4c_{12}^2\right)^4$$

$$-\frac{(d+2)^3}{8}\left(c^2+1/4c_{12}^2\right)^2+\frac{(d+2)^3}{8d}a_2c^2c_{12}^2\Big]$$

$$\to = \tfrac12\left(1-d-2+a_2\tfrac{(d+2)(3d+5)}{4}+a_2\tfrac12-a_2\tfrac{(d+2)^2(d+1)}{4}\right)$$
$$= \tfrac12\left(-d-1+a_2\tfrac12+a_2\tfrac{d+2}{4}(3d+5-d^2-d-2d-2)\right)$$

$$= \frac{4\sigma^{d-1}\beta_1 n}{d(d+2)V_0\pi^d}\sqrt{\frac{2}{\beta m}}\int_{\mathbb{R}^{2d}} dc\,dc_{12}\,|c_{12}|\,e^{-2c^2}e^{-c_{12}^2/2}\Big[\left(c^2+\tfrac14c_{12}^2\right)\left(c^4+\tfrac1{16}c_{12}^4+\tfrac12c^2c_{12}^2\right)\left(1+a_2\tfrac{d+2}{4}(3d+5)\right)$$

$$+\,c^4c_{12}^2\left(\frac2d-a_2\frac{(d+2)(d+4)}{4d}\right)+c^2c_{12}^4\left(\frac4d-a_2\frac{(d+2)(d+6)}{4d}\right)+c^2\left(\frac{(d+2)^2}{2}+a_2\frac{d(d+2)^3}{16}-a_2\frac{d+2}{2}\right)$$

$$-\,c_{12}^2a_2\frac{d+2}{8}+\left(c^4-\tfrac1{16}c_{12}^4\right)\left(-d-1+\frac{a_2}{2}+a_2\frac{d+2}{4}(3-d^2)\right)\Big)$$

$$+\tfrac12a_2\left(c^2+1/4c_{12}^2\right)^3\left(c^4+\tfrac1{16}c_{12}^4+\tfrac12c^2c_{12}^2\right)+\tfrac14a_2c_{12}^2\tfrac{3}{d^2}c^4c_{12}^4-\tfrac14a_2c_{12}^2\,2d\,c_j^4c_{12j}^4$$

$$-\,a_2\tfrac1d c^2c_{12}^2\left(c^2+1/4c_{12}^2\right)\left(c^4+\tfrac1{16}c_{12}^4+\tfrac12c^2c_{12}^2\right)+\frac{d+2}{d}c^2c_{12}^2\left(c^4+\tfrac1{16}c_{12}^4+\tfrac12c^2c_{12}^2\right)$$

$$-\,a_2(d+2)\left(c^2-1/4c_{12}^2\right)\left(c^2+1/4c_{12}^2\right)\left(c^4+\tfrac1{16}c_{12}^4+\tfrac12c^2c_{12}^2\right)-a_2\frac{d+2}{2}\left(c^4+\tfrac1{16}c_{12}^4+\tfrac12c^2c_{12}^2\right)^2$$

$$-\frac{(d+2)^3}{8}\left(c^4+\tfrac1{16}c_{12}^4+\tfrac12c^2c_{12}^2\right)+\frac{(d+2)^3}{8d}a_2c^2c_{12}^2\Big]$$

$$= \frac{4\sigma^{d-1}\beta_1 n}{d(d+2)V_0\pi^d}\sqrt{\frac{2}{\beta m}}\int_{\mathbb{R}^{2d}} dc\,dc_{12}\,|c_{12}|\,e^{-2c^2}e^{-c_{12}^2/2}\Big[$$

$$\left(c^6+\tfrac1{16}c^2c_{12}^4+\tfrac12c^4c_{12}^2+\tfrac14c^4c_{12}^2+\tfrac1{64}c_{12}^6+\tfrac18c^2c_{12}^4\right)\left(1+a_2\tfrac{d+2}{4}(3d+5)\right)$$

$$+\,c^4c_{12}^2\left(\frac2d-a_2\frac{(d+2)(d+4)}{4d}\right)+c^2c_{12}^4\left(\frac4d-a_2\frac{(d+2)(d+6)}{4d}\right)+c^2\left(\frac{(d+2)^2}{2}+a_2\frac{d(d+2)^3}{16}-a_2\frac{d+2}{2}\right)$$

$$-\,c_{12}^2a_2\frac{d+2}{8}+c^4\left(-d-1+\frac{a_2}{2}+a_2\frac{(d+2)(3-d^2)}{4}\right)-c_{12}^4\frac1{16}\left(-d-1+\frac{a_2}{2}+a_2\frac{(d+2)(3-d^2)}{4}\right)$$

$$+\tfrac12a_2\left(c^2+1/4c_{12}^2\right)\left(c^8+\tfrac1{16^2}c_{12}^8+\tfrac18c^4c_{12}^4+\tfrac14c^4c_{12}^4+c^6c_{12}^2+\tfrac1{16}c^2c_{12}^6\right)$$

$$+\,\frac34\frac1{d^2}a_2c^4c_{12}^6-\frac d2a_2c_{12}^2c_j^4c_{12j}^4$$

$$-\,a_2\tfrac1d c^2c_{12}^2\left(c^6+\tfrac1{16}c^2c_{12}^4+\tfrac12c^4c_{12}^2+\tfrac14c^4c_{12}^2+\tfrac1{64}c_{12}^6+\tfrac12c^2c_{12}^4\right)$$

$$+\frac{d+2}{d}\left(c^6c_{12}^2+\tfrac1{16}c^2c_{12}^6+\tfrac12c^4c_{12}^4\right)-a_2(d+2)\left(c^4-\tfrac1{16}c_{12}^4\right)\left(c^4+\tfrac1{16}c_{12}^4+\tfrac12c^2c_{12}^2\right)$$

$$-\,a_2\frac{d+2}{2}\left(c^8+\tfrac1{16^2}c_{12}^8+\tfrac18c^4c_{12}^4+\tfrac14c^4c_{12}^4+c^6c_{12}^2+\tfrac1{16}c^2c_{12}^6\right)$$

$$-\frac{(d+2)^3}{8}\left(c^4+\tfrac1{16}c_{12}^4+\tfrac12c^2c_{12}^2\right)+\frac{(d+2)^3}{8d}a_2c^2c_{12}^2\Big]$$

$$= \underbrace{\frac{4\sigma}{d(d+2)\pi^d} \frac{\pi}{\Gamma(\frac{d+1}{2})} \frac{\beta}{\alpha} \frac{d+2}{8} \frac{\Gamma(d/2)}{\pi} \frac{\sqrt{\cdot}}{\cdot} \sqrt{\frac{2}{\beta\pi}}}_{= \frac{1}{d}\frac{\Gamma(d/2)}{\Gamma(\frac{d+1}{2})}\frac{1}{\sqrt{2}\pi^d}} \int_{\mathbb{R}^{2d}} dc\, dc_{12}\, |c_{12}|\, e^{-2c^2} e^{-c_{12}^2/2} \Bigg[$$

$$\left(c^6 + \frac{3}{16}c^2 c_{12}^4 + \frac{3}{4}c^4 c_{12}^2 + \frac{1}{64}c_{12}^6\right)\left(1 + a_2\frac{d+2}{4}(3d+5)\right) + c^4 c_{12}^2\left(\frac{2}{d} - a_2\frac{(d+2)(d+4)}{4d}\right)$$

$$+ c^2 c_{12}^4\left(\frac{4}{d} - a_2\frac{(d+2)(d+6)}{4d}\right) + c^2\left(\frac{(d+2)^2}{2} + a_2\frac{d+2}{2}\left(d(d+2)^2\frac{1}{8} - 1\right)\right) - c_{12}^2 a_2 \frac{d+2}{8}$$

$$+ c^4\left(-d - 1 + \frac{a_2}{2} + a_2\frac{(d+2)(3-d^2)}{4}\right) - c_{12}^4 \frac{1}{16}\left(-d - 1 + \frac{a_2}{2} + a_2\frac{(d+2)(3-d^2)}{4}\right)$$

$$+ \frac{1}{2}a_2\left(c^{10} + \frac{1}{16^2}c^2 c_{12}^8 + \frac{1}{8}c^6 c_{12}^4 + \frac{1}{4}c^6 c_{12}^4 + c^8 c_{12}^2 + \frac{1}{16}c^4 c_{12}^6\right)$$

$$+ \frac{1}{8}a_2\left(c^8 c_{12}^2 + \frac{1}{16^2}c_{12}^{10} + \frac{1}{8}c^4 c_{12}^6 + \frac{1}{4}c^4 c_{12}^6 + c^6 c_{12}^4 + \frac{1}{16}c^2 c_{12}^8\right)$$

$$+ \frac{3}{4}\frac{1}{d^2}a_2 c^4 c_{12}^6 - \frac{d}{2}a_2 c_{12}^2 c_j^4 c_{12j}^4$$

$$- a_2\frac{1}{d}\left(c^8 c_{12}^2 + \frac{1}{16}c^4 c_{12}^6 + \frac{1}{2}c^6 c_{12}^4 + \frac{1}{4}c^6 c_{12}^4 + \frac{1}{64}c^2 c_{12}^8 + \frac{1}{2}c^4 c_{12}^6\right)$$

$$+ \frac{d+2}{d}\left(c^6 c_{12}^2 + \frac{1}{16}c^2 c_{12}^6 + \frac{1}{2}c^4 c_{12}^4\right) - a_2(d+2)\left(c^8 + \frac{1}{16}c^4 c_{12}^4 + \frac{1}{2}c^6 c_{12}^2\right)$$

$$+ a_2\frac{d+2}{16}\left(c^4 c_{12}^4 + \frac{1}{16}c_{12}^8 + \frac{1}{2}c^2 c_{12}^6\right)$$

$$- a_2\frac{d+2}{2}\left(c^8 + \frac{1}{16^2}c_{12}^8 + \frac{1}{8}c^4 c_{12}^4 + \frac{1}{4}c^4 c_{12}^4 + c^6 c_{12}^2 + \frac{1}{16}c^2 c_{12}^6\right)$$

$$- \frac{(d+2)^3}{8}\left(c^4 + \frac{1}{16}c_{12}^4 + \frac{1}{2}c^2 c_{12}^2\right) + \frac{(d+2)^3}{8d}a_2 c^2 c_{12}^2 \Bigg]$$

⋮

etc.

Il est illusoire de pouvoir réaliser ce calcul à la main dans un temps raisonnable.
Il faut utiliser plusieurs logiciels de calcul symbolique.

Vérification du terme $\mathcal{V}^{*a}$ bis :

$$\mathcal{V}^{*a} = \frac{2m\beta^3}{d(d+2)nV_0}\int_{\mathbb{R}^d} dv\, S_i(v)\, L_a[\mathcal{M}S_i]$$

$$\overset{\text{lemme}}{=} \frac{2m\beta^3}{d(d+2)nV_0}\sigma^{d-1}\beta_1 \int_{\mathbb{R}^{2d}} dV_1 dV_2\, |V_{12}|\, f^{(0)}(V_1)\mathcal{M}(V_2)\, S_i(V_2)\left[S_i(V_1)+S_i(V_2)\right]$$

$$= \frac{2m\beta^3}{d(d+2)nV_0}\sigma^{d-1}\beta_1 \int_{\mathbb{R}^{2d}} dV_1 dV_2\, |V_{12}|\, \frac{n}{V_T^d}\frac{1}{\pi^{d/2}} e^{-V_1^2/V_T^2}\left[1+a_2 S_2\left(\frac{V_1^2}{V_T^2}\right)\right]\frac{n}{V_T^d}\frac{1}{\pi^{d/2}}e^{-V_2^2/V_T^2} \times$$
$$\times\left[\left(\frac{m}{2}V_2^2-\frac{d+2}{2}k_BT\right)V_{2i}V_{2i} + \left(\frac{m}{2}V_1^2-\frac{d+2}{2}k_BT\right)\left(\frac{m}{2}V_2^2-\frac{d+2}{2}k_BT\right)V_{1i}V_{2i}\right]$$

$$= \frac{2m\beta^3}{d(d+2)V_0}\sigma^{d-1}\beta_1 \frac{n}{1}\frac{1}{\pi^d}\int_{\mathbb{R}^{2d}} dc_1 dc_2\, |c_{12}|V_T\, e^{-c_1^2}e^{-c_2^2}\left[1+a_2 S_2(c_1^2)\right]\times$$
$$\times\left[\left(\frac{m}{2}V_T^2c_2^2-\frac{d+2}{2}\frac{1}{\beta}\right)^2 V_T^2c_2^2 + \left(\frac{m}{2}V_T^2c_1^2-\frac{d+2}{2}\frac{1}{\beta}\right)\left(\frac{m}{2}V_T^2c_2^2-\frac{d+2}{2}\frac{1}{\beta}\right)V_T^2\, c_1\cdot c_2\right] \quad ; V_T^2=\frac{2}{\beta m}$$

$$= \frac{2m\beta^3}{d(d+2)V_0\pi^d}n\sigma^{d-1}\beta_1 V_T^3V_T^4\int_{\mathbb{R}^{2d}} dc_1dc_2\,|c_{12}|e^{-c_1^2-c_2^2}\left[1+a_2S_2(c_1^2)\right]\times$$
$$\times\left[\left(\frac{m}{2}c_2^2-\frac{d+2}{2}\frac{m}{2}\underbrace{\frac{2}{\beta m}\frac{1}{V_T^2}}_{=1}\right)^2c_2^2+\left(\frac{m}{2}c_1^2-\frac{d+2}{2}\frac{m}{2}\underbrace{\frac{2}{\beta m}\frac{1}{V_T^2}}_{=1}\right)\left(\frac{m}{2}c_2^2-\frac{d+2}{2}\frac{m}{2}\underbrace{\frac{2}{\beta m}\frac{1}{V_T^2}}_{=1}\right)c_1\cdot c_2\right]$$

$$= \frac{2m\beta^3n\sigma^{d-1}\beta_1V_T^7}{d(d+2)V_0\pi^d}\frac{m^2}{4}\int_{\mathbb{R}^{2d}}dc_1dc_2\,|c_{12}|e^{-c_1^2-c_2^2}\left[1+a_2S_2(c_1^2)\right]\left[\left(c_2^2-\frac{d+2}{2}\right)^2c_2^2+\left(c_1^2-\frac{d+2}{2}\right)\left(c_2^2-\frac{d+2}{2}\right)c_1\cdot c_2\right]$$

$$= \frac{2}{4d\,\pi^d}\;\sqrt{\frac{2}{\beta m}}\;\frac{\Gamma(d/2)}{\;}\;\frac{\sqrt{k_BT}}{\;}\;\frac{1}{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)}\int_{\mathbb{R}^{2d}}dc_1dc_2\,|c_{12}|e^{-c_1^2-c_2^2}\left[1+a_2S_2(c_1^2)\right]\times$$
$$\times\left[\left(c_2^2-\frac{d+2}{2}\right)^2c_2^2+\left(c_1^2-\frac{d+2}{2}\right)\left(c_2^2-\frac{d+2}{2}\right)(c_1\cdot c_2)\right]$$

$$= \frac{1}{d}\frac{\Gamma(d/2)}{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)}\frac{1}{\sqrt{2}\pi^d}\int_{\mathbb{R}^{2d}}dc_1dc_2\,|c_{12}|e^{-c_1^2-c_2^2}\left[1+a_2\left(\frac{1}{2}c_1^4-\underbrace{\frac{d+2}{2}}_{:=A}c_1^2+\underbrace{\frac{d(d+2)}{8}}_{=\frac{d}{4}A}\right)\right]\left[\left(c_2^2-\underbrace{\frac{d+2}{2}}_{=A}\right)^2c_2^2+\left(c_1^2-\underbrace{\frac{d+2}{2}}_{=A}\right)\left(c_2^2-\underbrace{\frac{d+2}{2}}_{=A}\right)c_1\cdot c_2\right]$$

$$= \frac{1}{d}\frac{\Gamma(d/2)}{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)}\frac{1}{\sqrt{2}\pi^d}\int_{\mathbb{R}^{2d}}dc_1dc_2\,|c_{12}|e^{-c_1^2-c_2^2}\left[1+a_2\left(\frac{1}{2}c_1^4-Ac_1^2+\frac{d}{4}A\right)\right]\left[(c_2^2-A)^2c_2^2+(c_1^2-A)(c_2^2-A)\,c_1\cdot c_2\right]$$

$$= \frac{1}{d}\frac{\Gamma(d/2)}{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)}\frac{1}{\sqrt{2}\pi^d}\int_{\mathbb{R}^{2d}}dc_1dc_2\,|c_{12}|e^{-c_1^2-c_2^2}\underbrace{\left[1+a_2\left(\frac{1}{2}c_1^4-Ac_1^2+\frac{d}{4}A\right)\right](c_2^2-A)}\;\underbrace{\left[(c_2^2-A)c_2^2+(c_1^2-A)\,c_1\cdot c_2\right]}$$

$$= c_2^2-A+\frac{a_2}{2}c_1^4c_2^2-\frac{a_2}{2}c_1^4A - a_2Ac_1^2c_2^2+a_2A^2c_1^2+a_2\frac{d}{4}Ac_2^2-a_2\frac{d}{4}A^2$$

$$= c_2^4-Ac_2^2+c_1^2(c_1\cdot c_2)-A(c_1\cdot c_2)$$

$$= \frac{1}{d}\frac{\Gamma(d/2)}{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)}\frac{1}{\sqrt{2}\pi^d}\int_{\mathbb{R}^{2d}}dc_1dc_2\,|c_{12}|e^{-c_1^2-c_2^2}\left[-A\left(1+a_2\frac{d}{4}A\right)+\left(1+a_2\frac{d}{4}A\right)c_2^2+\frac{a_2}{2}c_1^4c_2^2-\frac{a_2}{2}Ac_1^4-a_2Ac_1^2c_2^2+a_2A^2c_1^2\right]\times$$
$$\times\left[c_2^4-Ac_2^2+c_1^2(c_1\cdot c_2)-A(c_1\cdot c_2)\right]$$

$$= \frac{1}{d}\frac{\Gamma(d/2)}{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)}\frac{1}{\sqrt{2}\pi^d}\int_{\mathbb{R}^{2d}}dc_1dc_2\,|c_{12}|e^{-c_1^2-c_2^2}\Big[-A\left(1+a_2\frac{d}{4}A\right)c_2^4+A^2\left(1+a_2\frac{d}{4}A\right)c_2^2-A\left(1+a_2\frac{d}{4}A\right)c_1^2(c_1\cdot c_2)+A^2\left(1+a_2\frac{d}{4}A\right)(c_1\cdot c_2)$$
$$+\left(1+a_2\frac{d}{4}A\right)c_2^6 \quad -A\left(1+a_2\frac{d}{4}A\right)c_2^4 \quad +\left(1+a_2\frac{d}{4}A\right)c_1^2c_2^2(c_1\cdot c_2) \quad -A\left(1+a_2\frac{d}{4}A\right)c_2^2(c_1\cdot c_2)$$
$$+\frac{a_2}{2}c_1^4c_2^6 \quad -\frac{a_2}{2}Ac_1^4c_2^4 \quad +\frac{a_2}{2}c_1^6c_2^2(c_1\cdot c_2) \quad -\frac{a_2}{2}Ac_1^4c_2^2(c_1\cdot c_2)$$
$$-\frac{a_2}{2}Ac_1^4c_2^4 \quad +\frac{a_2}{2}A^2c_1^4c_2^2 \quad -\frac{a_2}{2}Ac_1^6(c_1\cdot c_2) \quad +\frac{a_2}{2}A^2c_1^4(c_1\cdot c_2)$$
$$-a_2Ac_1^2c_2^6 \quad +a_2A^2c_1^2c_2^4 \quad -a_2Ac_1^4c_2^2(c_1\cdot c_2) \quad +a_2A^2c_1^2c_2^2(c_1\cdot c_2)$$
$$+a_2A^2c_1^2c_2^4 \quad -a_2A^3c_1^2c_2^2 \quad +a_2A^2c_1^4(c_1\cdot c_2) \quad -a_2A^3c_1^2(c_1\cdot c_2)\Big]$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{d}\frac{\Gamma(d/2)}{\Gamma(\frac{d+1}{2})}\frac{1}{\sqrt{2\pi}^d}\int_{\mathbb{R}^{2d}} dc_1 dc_2\, |c_{12}|\, e^{-c_1^2-c_2^2}\Big[-2A\big(1+a_2\tfrac{d}{4}A\big)c_2^4 + A^2\big(1+a_2\tfrac{d}{4}A\big)c_2^2 - A\big(1+a_2\tfrac{d}{4}A + a_2A^2\big)c_1^2(c_1\cdot c_2)\\
&\quad + A^2\big(1+a_2\tfrac{d}{4}A\big)(c_1\cdot c_2) + \big(1+a_2\tfrac{d}{4}A\big)c_2^6 + \big(1+a_2\tfrac{d}{4}A + a_2A^2\big)c_1^2c_2^2(c_1\cdot c_2)\\
&\quad - A\big(1+a_2\tfrac{d}{4}A\big)c_2^2(c_1\cdot c_2) + \frac{a_2}{2}c_1^4c_2^6 - a_2Ac_1^4c_2^4 + \frac{a_2}{2}c_1^6c_2^2(c_1\cdot c_2)\\
&\quad - \frac{3}{2}a_2Ac_1^4c_2^2(c_1\cdot c_2) + \frac{a_2}{2}A^2c_1^4c_2^2 - \frac{a_2}{2}Ac_1^6(c_1\cdot c_2) + \frac{3}{2}a_2A^2c_1^4(c_1\cdot c_2)\\
&\quad - a_2Ac_1^2c_2^6 + 2a_2A^2c_1^2c_2^4 - a_2A^3c_1^2c_2^2\Big]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{d}\frac{\Gamma(d/2)}{\Gamma(\frac{d+1}{2})}\frac{1}{\sqrt{2\pi}^d}\int_{\mathbb{R}^{2d}} dc_1 dc_2\, |c_{12}|\, e^{-c_1^2-c_2^2}\Big[-2A\big(1+a_2\tfrac{d}{4}A\big)c_2^4 + A^2\big(1+a_2\tfrac{d}{4}A\big)c_2^2 \boxed{-A\big(1+a_2A(\tfrac{d}{4}+A)\big)c_1^2(c_1\cdot c_2)}\\
&\quad + A^2\big(1+a_2\tfrac{d}{4}A\big)(c_1\cdot c_2) + \big(1+a_2\tfrac{d}{4}A\big)c_2^6 + \big(1+a_2A(\tfrac{d}{4}+A)\big)c_1^2c_2^2(c_1\cdot c_2)\\
&\quad \boxed{-A\big(1+a_2\tfrac{d}{4}A\big)c_2^2(c_1\cdot c_2)} + \frac{a_2}{2}c_1^4c_2^6 - a_2Ac_1^4c_2^4\\
&\quad + \frac{a_2}{2}c_1^6c_2^2(c_1\cdot c_2) - \frac{3}{2}a_2Ac_1^4c_2^2(c_1\cdot c_2) + \frac{a_2}{2}A^2c_1^4c_2^2\\
&\quad - \frac{a_2}{2}Ac_1^6(c_1\cdot c_2) + \frac{3}{2}a_2A^2c_1^4(c_1\cdot c_2) - a_2Ac_1^2c_2^6\\
&\quad + 2a_2A^2c_1^2c_2^4 - a_2A^3c_1^2c_2^2\Big]
\end{aligned}
\qquad (11)
$$

On utilise (néglige les termes impairs) :

$$
\begin{aligned}
c_2^4 &= (C^2+1/4\,c_{12}^2)^2 + \frac{1}{d}C^2c_{12}^2\\
c_2^2 &= C^2 + \frac{1}{4}c_{12}^2\\
c_1^2(c_1\cdot c_2) &= C^4 - \frac{1}{16}c_{12}^4\\
(c_1\cdot c_2) &= C^2 - 1/4\,c_{12}^2\\
c_2^6 &= (C^2+1/4\,c_{12}^2)^3 + \frac{3}{d}C^2c_{12}^2(C^2+1/4\,c_{12}^2)\\
c_1^2c_2^2(c_1\cdot c_2) &= (C^2+1/4\,c_{12}^2)^2(C^2-1/4\,c_{12}^2) - \frac{1}{d}C^2c_{12}^2(C^2-1/4\,c_{12}^2)\\
c_2^2(c_1\cdot c_2) &= C^4 - \frac{1}{16}c_{12}^4\\
c_1^4c_2^6 &= (C^2+1/4\,c_{12}^2)^5 + \Big(\frac{3}{d^2}C^4c_{12}^4 - 2d\,C_j^4c_{12j}^4\Big)(C^2+1/4\,c_{12}^2) - \frac{2}{d}C^2c_{12}^2(C^2+1/4\,c_{12}^2)^3\\
c_1^4c_2^4 &= (C^2+1/4\,c_{12}^2)^4 - \frac{2}{d}C^2c_{12}^2(C^2+1/4\,c_{12}^2)^2 + \frac{3}{d^2}C^4c_{12}^4 - 2d\,C_j^4c_{12j}^4\\
c_1^6c_2^2(c_1\cdot c_2) &= (C^2-1/4\,c_{12}^2)(C^2+1/4\,c_{12}^2)^4 - \Big(\frac{3}{d^2}C^4c_{12}^4 - 2d\,C_j^4c_{12j}^4\Big)(C^2-1/4\,c_{12}^2)\\
c_1^4c_2^2(c_1\cdot c_2) &= (C^2-1/4\,c_{12}^2)(C^2+1/4\,c_{12}^2)^3 - \frac{1}{d}C^2c_{12}^2(C^2-1/4\,c_{12}^2)(C^2+1/4\,c_{12}^2)\\
c_1^4c_2^2 &= (C^2+1/4\,c_{12}^2)^3 - \frac{1}{d}C^2c_{12}^2(C^2+1/4\,c_{12}^2)\\
c_1^6(c_1\cdot c_2) &= (C^2-1/4\,c_{12}^2)(C^2+1/4\,c_{12}^2)^3 + \frac{3}{d}C^2c_{12}^2(C^2+1/4\,c_{12}^2)(C^2-1/4\,c_{12}^2)\\
c_1^4(c_1\cdot c_2) &= (C^2-1/4\,c_{12}^2)(C^2+1/4\,c_{12}^2)^2 + \frac{1}{d}C^2c_{12}^2(C^2-1/4\,c_{12}^2)\\
c_1^2c_2^6 &= (C^2+1/4\,c_{12}^2)^4 - \frac{3}{d^2}C^4c_{12}^4 + 2d\,C_j^4c_{12j}^4\\
c_1^2c_2^4 &= (C^2+1/4\,c_{12}^2)^3 - \frac{1}{d}C^2c_{12}^2(C^2+1/4\,c_{12}^2)\\
c_1^2c_2^2 &= (C^2+1/4\,c_{12}^2)^2 - \frac{1}{d}C^2c_{12}^2
\end{aligned}
\qquad (12)
$$

Où on a utilisé par isotropie (relations déjà vérifiées à la main) :

$$
\begin{aligned}
(x\cdot y)^2 &= \frac{1}{d}x^2y^2\\
(x\cdot y)^4 &= \frac{3}{d^2}x^4y^4 - 2d\,x_j^4y_j^4\,, \quad j\in\{1,\dots,d\}.
\end{aligned}
$$

Insérant les développements (12) dans (11) il vient $\left(A=\frac{d+2}{2}\,;\ c_1^2+c_2^2 = 2C^2 - c_{12}^2/2\right)$:

$$
\begin{aligned}
\nu^{*a} &= \frac{1}{d}\frac{\Gamma(d/2)}{\Gamma(\frac{d+1}{2})}\frac{1}{\sqrt{2\pi}^d}\int_{\mathbb{R}^{2d}} dC\,dc_{12}\,|c_{12}|\,e^{-2C^2-c_{12}^2/2}\Big[-a_2\frac{d}{2}C_j^4c_{12j}^4c_{12}^2 + C^6\Big(\frac{11}{2}a_2d + \frac{3}{2}a_2d^2 + 2 + 5a_2\Big)\\
&\quad + C^2\Big(\frac{3}{4}a_2d^2 + \frac{1}{16}d^4a_2 + 2 + \frac{1}{2}a_2d + 2d + \frac{1}{2}d^2 + \frac{3}{8}a_2d^3\Big) + C^4\Big(-\frac{1}{2}a_2d^3 - 4 - \frac{5}{2}a_2d^2 - 4a_2d - 2a_2 - 2d\Big)\\
&\quad + C^2c_{12}^2\Big(\frac{a_2}{2} - 2 - \frac{d}{2} + a_2\frac{1}{d} - a_2\frac{3}{4}d - \frac{2}{d} - a_2\frac{5}{8}d^2 - a_2\frac{d^3}{8}\Big) + C^4c_{12}^2\Big(\frac{2}{d} + a_2\frac{5}{2}d + 1 + a_2\frac{3}{4}d^2 - a_2\frac{2}{d} + a_2\Big)\\
&\quad + C^2c_{12}^4\Big(-a_2\frac{3}{4d} - a_2\frac{3}{16} + a_2\frac{9d}{32} + a_2\frac{3}{32}d^2 + \frac{1}{8} + \frac{1}{d}\Big) + C^6c_{12}^2\Big(-d\frac{3}{2}a_2 - 2a_2 + a_2\frac{2}{d}\Big) + C^{10}a_2 + C^8(-2a_2d - 4a_2)\\
&\quad + C^8c_{12}^2\Big(-a_2\frac{1}{d} + a_2\Big) + C^4c_{12}^4\Big(-\frac{a_2}{4} + \frac{a_2}{d} - a_2\frac{3}{8}d\Big) + C^2c_{12}^6\Big(-a_2\frac{d}{32} + a_2\frac{1}{8d}\Big) + C^6c_{12}^4\Big(\frac{3a_2}{8} - \frac{3a_2}{4d}\Big)\\
&\quad + C^4c_{12}^6\Big(a_2\frac{1}{16} + \frac{3a_2}{4d^2} - \frac{3a_2}{16d}\Big) + \Big(-\frac{a_2}{64d} + \frac{a_2}{256}\Big)C^2c_{12}^8\Big]
\end{aligned}
$$

$$= \frac{1}{d}\frac{\Gamma(d/2)}{\Gamma(\frac{d+1}{2})}\frac{1}{\sqrt{2}\,\pi^d}\left[\sum_{(i,j)\in\Omega_\alpha}\alpha_{i,j}\, I^2[i]\, I^{1/2}[j+1] + \sum_{(i,j)\in\Omega_\gamma}\gamma_{i,j}\, b^2[i]\, b^{1/2}[j+1]\right], \qquad (13)$$

où

$$I^a[n] = \int_{\mathbb{R}^d} dx\, |x|^n e^{-ax^2} = \frac{\pi^{d/2}}{a^{(d+n)/2}}\frac{\Gamma(\frac{d+n}{2})}{\Gamma(d/2)}$$

$$b^a[n] = M^a_{iiii}[n] \overset{\text{déjà vérifié}}{=} 3\pi^{(d-1)/2}\, 2^{d-4}\frac{(d+n)(d+n+2)}{d(d+2)}\frac{\Gamma(\frac{d+n}{2})\Gamma(\frac{d-1}{2})}{\Gamma(d-1)}\frac{1}{a^{\frac{d+n+4}{2}}} = \frac{3}{4}\pi^{d/2}\frac{(d+n)(d+n+2)}{d(d+2)}\frac{\Gamma(\frac{d+n}{2})}{\Gamma(d/2)}\frac{1}{a^{\frac{d+n+4}{2}}}$$

et:

$$\Omega_\alpha = \{(10,0);(8,0);(8,2);(6,0);(6,2);(6,4);(4,0);(4,2);(4,4);(4,6);(2,0);(2,2);(2,4);(2,6);(2,8)\},$$

$$\Omega_\gamma = \{(0,2)\}.$$

et:

$\alpha_{10,0} = a_2$ ✓

$\alpha_{8,0} = -2a_2 d - 4a_2 = -2a_2(2+d)$ ✓

$\alpha_{8,2} = -a_2\frac{1}{d} + a_2 = a_2(1 - 1/d)$ ✓

$\alpha_{6,0} = \frac{11}{2}a_2 d + \frac{3}{2}a_2 d^2 + 2 + 5a_2 = 2 + a_2\frac{1}{2}(10 + 11d + 3d^2)$ ✓

$\alpha_{6,2} = -d\frac{3}{2}a_2 - 2a_2 + a_2\frac{2}{d} = a_2\frac{1}{2}\left(\frac{4}{d} - 4 - 3d\right)$ ✓

$\alpha_{6,4} = \frac{3a_2}{8} - \frac{3a_2}{4d} = a_2\frac{3}{8}\left(1 - \frac{2}{d}\right)$ ✓

$\alpha_{4,0} = -\frac{1}{2}a_2 d^3 - 4 - \frac{5}{2}a_2 d^2 - 4a_2 d - 2a_2 - 2d = -2d - 4 - a_2\frac{1}{2}(4 + 8d + 5d^2 + d^3)$ ✓

$\alpha_{4,2} = \frac{2}{d} + a_2\frac{5}{2}d + 1 + a_2\frac{3}{4}d^2 - a_2\frac{2}{d} + a_2 = 1 + \frac{2}{d} + a_2\frac{1}{4}\left(-\frac{8}{d} + 4 + 10d + 3d^2\right)$ ✓

$\alpha_{4,4} = -\frac{a_2}{4} + \frac{a_2}{d} - a_2\frac{3}{8}d = a_2\frac{1}{8}\left(\frac{8}{d} - 2 - 3d\right)$ ✓

$\alpha_{4,6} = a_2\frac{1}{16} + \frac{3a_2}{4d^2} - \frac{3a_2}{16d} = a_2\frac{1}{16}\left(\frac{12}{d^2} - \frac{3}{d} + 1\right)$ ✓

$\alpha_{2,0} = \frac{3}{4}a_2 d^2 + \frac{1}{16}d^4 a_2 + 2 + \frac{1}{2}a_2 d + 2d + \frac{1}{2}d^2 + \frac{3}{8}a_2 d^3 = 2 + 2d + \frac{1}{2}d^2 + a_2\frac{d}{16}\overbrace{(8 + 12d + 6d^2 + d^3)}^{=(d+2)^3}$ ✓

$\alpha_{2,2} = \frac{a_2}{2} - 2 - \frac{d}{2} + a_2\frac{1}{d} - a_2\frac{3}{4}d - \frac{2}{d} - a_2\frac{5}{8}d^2 - a_2\frac{d^3}{8} = -\frac{2}{d} - 2 - \frac{d}{2} + a_2\frac{1}{8}\left(\frac{8}{d} + 4 - 6d - 5d^2 - d^3\right)$ ✓

$\alpha_{2,4} = -a_2\frac{3}{4d} - a_2\frac{3}{16} + a_2\frac{9d}{32} + a_2\frac{3}{32}d^2 + \frac{1}{8} + \frac{1}{d} = \frac{1}{8} + \frac{1}{d} + a_2\frac{1}{32}\left(-\frac{24}{d} - 6 + 9d + 3d^2\right)$ ✓

$\alpha_{2,6} = -a_2\frac{d}{32} + a_2\frac{1}{8d} = a_2\frac{1}{32}\left(\frac{4}{d} - d\right)$ ✓

$\alpha_{2,8} = -a_2\frac{1}{64d} + \frac{a_2}{256} = a_2\frac{1}{256}\left(1 - \frac{4}{d}\right)$ ✓

et:

$\gamma_{0,2} = -a_2\frac{d}{2}$. ✓ [Maple = Mathematica] OK

Ainsi:

$$\sum_{(i,j)\in\Omega_\gamma}\gamma_{i,j}\, b^2[i]\, b^{1/2}[j+1] = \gamma_{0,2}\, b^2[0]\, b^{1/2}[3]$$

$$= -a_2\frac{d}{2}\,\frac{3}{4}\pi^{d/2}\frac{d(d+2)}{d(d+2)}\frac{\Gamma(d/2)}{\Gamma(d/2)}\frac{1}{2^{\frac{d+4}{2}}}\;\frac{3}{4}\pi^{d/2}\frac{(d+3)(d+5)}{d(d+2)}\frac{\Gamma(\frac{d+3}{2})}{\Gamma(d/2)}\,2^{\frac{d+4}{2}+\frac{3}{2}}$$

$$= -a_2\frac{d}{2}\frac{9}{16}\pi^d\frac{(d+3)(d+5)}{d(d+2)}\frac{d+1}{2}\frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})}{\Gamma(d/2)}\sqrt{2}\,2$$

$$= -\sqrt{2}\,\pi^d\frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})}{\Gamma(d/2)}\, a_2\frac{9}{32}\frac{(d+1)(d+3)(d+5)}{(d+2)} \qquad (14)$$ ✓

avec pour la suite:

$$I^2[i]\, I^{1/2}[j+1] = \frac{\pi^{d/2}}{2^{\frac{d+i}{2}}}\frac{\Gamma(\frac{d+i}{2})}{\Gamma(d/2)}\frac{\pi^{d/2}}{(\frac{1}{2})^{\frac{d+j+1}{2}}}\frac{\Gamma(\frac{d+j+1}{2})}{\Gamma(d/2)}$$

$$= \pi^d\, 2^{\frac{j-i+1}{2}}\frac{\Gamma(\frac{d+i}{2})\Gamma(\frac{d+j+1}{2})}{\Gamma(d/2)^2}$$

Ainsi:

$$
\begin{aligned}
\sum_{(i,j)\in\Omega_\alpha} \alpha_{i,j}\, I^2[i]\, I^{1/2}[j+2] = {} & \alpha_{10,0}\,\pi^d\, 2^{\frac{0-10+1}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{d+10}{2}\right)\Gamma\left(\frac{d+0+1}{2}\right)}{\Gamma(d/2)^2} + \alpha_{8,0}\,\pi^d\, 2^{\frac{0-8+1}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{d+8}{2}\right)\Gamma\left(\frac{d+0+1}{2}\right)}{\Gamma(d/2)^2} \\
& + \alpha_{8,2}\,\pi^d\, 2^{\frac{2-8+1}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{d+8}{2}\right)\Gamma\left(\frac{d+2+1}{2}\right)}{\Gamma(d/2)^2} + \alpha_{6,0}\,\pi^d\, 2^{\frac{0-6+1}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{d+6}{2}\right)\Gamma\left(\frac{d+0+1}{2}\right)}{\Gamma(d/2)^2} \\
& + \alpha_{6,2}\,\pi^d\, 2^{\frac{2-6+1}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{d+6}{2}\right)\Gamma\left(\frac{d+2+1}{2}\right)}{\Gamma(d/2)^2} + \alpha_{6,4}\,\pi^d\, 2^{\frac{4-6+1}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{d+6}{2}\right)\Gamma\left(\frac{d+4+1}{2}\right)}{\Gamma(d/2)^2} \\
& + \alpha_{4,0}\,\pi^d\, 2^{\frac{0-4+1}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{d+4}{2}\right)\Gamma\left(\frac{d+0+1}{2}\right)}{\Gamma(d/2)^2} + \alpha_{4,2}\,\pi^d\, 2^{\frac{2-4+1}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{d+4}{2}\right)\Gamma\left(\frac{d+2+1}{2}\right)}{\Gamma(d/2)^2} \\
& + \alpha_{4,4}\,\pi^d\, 2^{\frac{4-4+1}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{d+4}{2}\right)\Gamma\left(\frac{d+4+1}{2}\right)}{\Gamma(d/2)^2} + \alpha_{4,6}\,\pi^d\, 2^{\frac{6-4+1}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{d+4}{2}\right)\Gamma\left(\frac{d+6+1}{2}\right)}{\Gamma(d/2)^2} \\
& + \alpha_{2,0}\,\pi^d\, 2^{\frac{0-2+1}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{d+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{d+0+1}{2}\right)}{\Gamma(d/2)^2} + \alpha_{2,2}\,\pi^d\, 2^{\frac{2-2+1}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{d+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{d+2+1}{2}\right)}{\Gamma(d/2)^2} \\
& + \alpha_{2,4}\,\pi^d\, 2^{\frac{4-2+1}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{d+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{d+4+1}{2}\right)}{\Gamma(d/2)^2} + \alpha_{2,6}\,\pi^d\, 2^{\frac{6-2+1}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{d+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{d+6+1}{2}\right)}{\Gamma(d/2)^2} \\
& + \alpha_{2,8}\,\pi^d\, 2^{\frac{8-2+1}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{d+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{d+8+1}{2}\right)}{\Gamma(d/2)^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
= \pi^d \sqrt{2}\, \frac{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)}{\Gamma(d/2)} \Big[& \alpha_{10,0}\, 2^{-5} \tfrac{d+8}{2}\tfrac{d+6}{2}\tfrac{d+4}{2}\tfrac{d+2}{2}\tfrac{d}{2} + \alpha_{8,0}\, 2^{-4} \tfrac{d+6}{2}\tfrac{d+4}{2}\tfrac{d+2}{2}\tfrac{d}{2} + \alpha_{8,2}\, 2^{-3} \tfrac{d+6}{2}\tfrac{d+4}{2}\tfrac{d+2}{2}\tfrac{d}{2}\tfrac{d+1}{2} \\
& + \alpha_{6,0}\, 2^{-3} \tfrac{d+4}{2}\tfrac{d+2}{2}\tfrac{d}{2} + \alpha_{6,2}\, 2^{-2} \tfrac{d+4}{2}\tfrac{d+2}{2}\tfrac{d}{2}\tfrac{d+1}{2} + \alpha_{6,4}\, 2^{-1} \tfrac{d+4}{2}\tfrac{d+2}{2}\tfrac{d}{2}\tfrac{d+3}{2}\tfrac{d+1}{2} \\
& + \alpha_{4,0}\, 2^{-2} \tfrac{d+2}{2}\tfrac{d}{2} + \alpha_{4,2}\, 2^{-1} \tfrac{d+2}{2}\tfrac{d}{2}\tfrac{d+1}{2} + \alpha_{4,4}\, 2^{0} \tfrac{d+2}{2}\tfrac{d}{2}\tfrac{d+3}{2}\tfrac{d+1}{2} \\
& + \alpha_{4,6}\, 2^{1} \tfrac{d+2}{2}\tfrac{d}{2}\tfrac{d+5}{2}\tfrac{d+3}{2}\tfrac{d+1}{2} + \alpha_{2,0}\, 2^{-1} \tfrac{d}{2} + \alpha_{2,2}\, 2^{0} \tfrac{d}{2}\tfrac{d+1}{2} \\
& + \alpha_{2,4}\, 2^{1} \tfrac{d}{2}\tfrac{d+3}{2}\tfrac{d+1}{2} + \alpha_{2,6}\, 2^{2} \tfrac{d}{2}\tfrac{d+5}{2}\tfrac{d+3}{2}\tfrac{d+1}{2} + \alpha_{2,8}\, 2^{3} \tfrac{d}{2}\tfrac{d+7}{2}\tfrac{d+5}{2}\tfrac{d+3}{2}\tfrac{d+1}{2} \Big]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
= \pi^d \sqrt{2}\, \frac{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)}{\Gamma(d/2)} \Big[& \alpha_{10,0}\, 2^{-10} (d+8)(d+6)(d+4)(d^2+2d) + \alpha_{8,0}\, 2^{-8} (d+6)(d^3+2d^2+4d^2+8d) + \alpha_{8,2}\, 2^{-8} (d+6)(d^3+6d^2+8d)(d+1) \\
& + \alpha_{6,0}\, 2^{-6} (d^3+6d^2+8d) + \alpha_{6,2}\, 2^{-6} (d^4+6d^3+8d^2+d^3+6d^2+8d) + \alpha_{6,4}\, 2^{-6} (d^4+7d^3+14d^2+8d)(d+3) \\
& + \alpha_{4,0}\, 2^{-4} (d^2+2d) + \alpha_{4,2}\, 2^{-4} (d^3+2d^2+d^2+2d) + \alpha_{4,4}\, 2^{-4} (d^3+3d^2+2d)(d+3) \\
& + \alpha_{4,6}\, 2^{-4} (d^4+3d^3+2d^2+3d^3+9d^2+6d)(d+5) + \alpha_{2,0}\, 2^{-2} d + \alpha_{2,2}\, 2^{-2} (d^2+d) \\
& + \alpha_{2,4}\, 2^{-2} (d^3+d^2+3d^2+3d) + \alpha_{2,6}\, 2^{-2} (d^3+4d^2+3d)(d+5) + \alpha_{2,8}\, 2^{-2} (d^4+4d^3+3d^2+5d^3+20d^2+15d)(d+7) \Big]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
= \pi^d \sqrt{2}\, \frac{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)}{\Gamma(d/2)} \Big[& \alpha_{10,0}\, 2^{-10} (d+8)(d^4+6d^3+8d^2+6d^3+36d^2+48d) + \alpha_{8,0}\, 2^{-8} (d^4+12d^3+44d^2+48d) + \alpha_{8,2}\, 2^{-8} (d^4+12d^3+44d^2+48d)(d+1) \\
& + \alpha_{6,0}\, 2^{-6} (d^3+6d^2+8d) + \alpha_{6,2}\, 2^{-6} (d^4+7d^3+14d^2+8d) + \alpha_{6,4}\, 2^{-6} (d^5+7d^4+14d^3+8d^2+3d^4+21d^3+42d^2+24d) \\
& + \alpha_{4,0}\, 2^{-4} (d^2+2d) + \alpha_{4,2}\, 2^{-4} (d^3+3d^2+2d) + \alpha_{4,4} (d^4+3d^3+2d^2+3d^3+9d^2+6d) \\
& + \alpha_{4,6}\, 2^{-4} (d^4+6d^3+11d^2+6d)(d+5) + \alpha_{2,0}\, 2^{-2} d + \alpha_{2,2}\, 2^{-2} (d^2+d) \\
& + \alpha_{2,4}\, 2^{-2} (d^3+4d^2+3d) + \alpha_{2,6}\, 2^{-2} (d^4+4d^3+3d^2+5d^3+20d^2+15d) + \alpha_{2,8}\, 2^{-2} (d^4+9d^3+23d^2+15d)(d+7) \Big]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
= \pi^d \sqrt{2}\, \frac{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)}{\Gamma(d/2)} \Big[& \alpha_{10,0}\, 2^{-10} (d^5+12d^4+44d^3+48d^2+8d^4+96d^3+352d^2+384d) + \alpha_{8,0}\, 2^{-8} (d^4+12d^3+44d^2+48d) \\
& + \alpha_{8,2}\, 2^{-8} (d^5+12d^4+44d^3+48d^2+d^4+12d^3+44d^2+48d) \\
& + \alpha_{6,0}\, 2^{-6} (d^3+6d^2+8d) + \alpha_{6,2}\, 2^{-6} (d^4+7d^3+14d^2+8d) + \alpha_{6,4}\, 2^{-6} (d^5+10d^4+35d^3+50d^2+24d) \\
& + \alpha_{4,0}\, 2^{-4} (d^2+2d) + \alpha_{4,2}\, 2^{-4} (d^3+3d^2+2d) + \alpha_{4,4} (d^4+6d^3+11d^2+6d) \\
& + \alpha_{4,6}\, 2^{-4} (d^5+6d^4+11d^3+6d^2+5d^4+30d^3+55d^2+30d) + \alpha_{2,0}\, 2^{-2} d + \alpha_{2,2}\, 2^{-2} (d^2+d) \\
& + \alpha_{2,4}\, 2^{-2} (d^3+4d^2+3d) + \alpha_{2,6}\, 2^{-2} (d^4+9d^3+23d^2+15d) \\
& + \alpha_{2,8}\, 2^{-2} (d^5+9d^4+23d^3+15d^2+7d^4+63d^3+161d^2+105d) \Big]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
= \pi^d \sqrt{2}\, \frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})}{\Gamma(d/2)} \Big[& \alpha_{10,0}\, 2^{-10}(d^5+20d^4+140d^3+400d^2+384d) + \alpha_{8,0}\, 2^{-8}(d^4+12d^3+44d^2+48d) + \alpha_{8,2}\, 2^{-8}(d^5+13d^4+56d^3+92d^2+48d) \\
& + \alpha_{6,0}\, 2^{-6}(d^3+6d^2+8d) + \alpha_{6,2}\, 2^{-6}(d^4+7d^3+14d^2+8d) + \alpha_{6,4}\, 2^{-6}(d^5+10d^4+35d^3+50d^2+24d) \\
& + \alpha_{4,0}\, 2^{-4}(d^2+2d) + \alpha_{4,2}\, 2^{-4}(d^3+3d^2+2d) + \alpha_{4,4}\,(d^4+6d^3+11d^2+6d) \\
& + \alpha_{4,6}\, 2^{-4}(d^5+11d^4+41d^3+61d^2+30d) + \alpha_{2,0}\, 2^{-2} d + \alpha_{2,2}\, 2^{-2}(d^2+d) \\
& + \alpha_{2,4}\, 2^{-2}(d^3+4d^2+3d) + \alpha_{2,6}\, 2^{-2}(d^4+9d^3+23d^2+15d) + \alpha_{2,8}\, 2^{-2}(d^5+16d^4+86d^3+176d^2+105d) \Big]
\end{aligned}
$$

(13)

$$
\begin{aligned}
= \pi^d \sqrt{2}\, \frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})}{\Gamma(d/2)} \Big[& a_2\, 2^{-10}(d^5+20d^4+140d^3+400d^2+384d) - 2a_2(d+2)\, 2^{-8}(d^4+12d^3+44d^2+48d) + a_2 \frac{d-1}{\cancel{d}} 2^{-8} \cancel{d}(d^4+13d^3+56d^2+92d+48) \\
& + \Big(2 + a_2 \tfrac{1}{2}(10+11d+3d^2)\Big) 2^{-6}(d^3+6d^2+8d) + a_2 \frac{1}{2} \frac{4-4d-3d^2}{\cancel{d}} 2^{-6} \cancel{d}(d^3+7d^2+14d+8) + a_2 \frac{3}{8} \frac{d-2}{\cancel{d}} 2^{-6} \cancel{d}(d^4+10d^3+35d^2+50d+24) \\
& + \Big(-2d-4 - a_2 \tfrac{1}{2}(4+8d+5d^2+d^3)\Big) 2^{-4}(d^2+2d) + \Big(\frac{d+2}{\cancel{d}} + a_2 \frac{1}{4} \frac{-8+4d+10d^2+3d^3}{\cancel{d}}\Big) 2^{-4} \cancel{d}(d^2+3d+2) + a_2 \frac{1}{8} \frac{8-2d-3d^2}{\cancel{d}} \cancel{d}(d^3+6d^2+11d+6) \\
& + a_2 \frac{1}{16} \frac{12-3d+d^2}{d^{\cancel{2}}} 2^{-4} \cancel{d}(d^4+11d^3+41d^2+61d+30) + \Big(2+2d+\frac{d^2}{2} + a_2 \frac{1}{8} \frac{8+4d-6d^2-5d^3-d^4}{d}\Big) 2^{-2} d + \Big(\underbrace{-\frac{2}{d} - 2 - \frac{d}{2}}_{= -\frac{4+4d+d^2}{2d}} + a_2 \frac{1}{8} \frac{8+4d-6d^2-5d^3-d^4}{\cancel{d}}\Big) 2^{-2} \cancel{d}(d+1) \\
& + \Big(\underbrace{\frac{1}{8} + \frac{1}{d}}_{= \frac{d+8}{8d}} + a_2 \frac{1}{32} \frac{-24-6d+9d^2+3d^3}{\cancel{d}}\Big) 2^{-2} \cancel{d}(d^2+4d+3) + a_2 \frac{1}{32} \frac{4-d^2}{\cancel{d}} 2^{-2} \cancel{d}(d^3+9d^2+23d+15) + a_2 \frac{1}{256} \frac{d-4}{\cancel{d}} 2^{-2} \cancel{d}(d^4+16d^3+86d^2+176d+105) \Big]
\end{aligned}
$$

⋮

Maple

$$
= \pi^d \sqrt{2}\, \frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})}{\Gamma(d/2)} \left[\frac{1}{2} + \frac{27}{32} d + \frac{1}{4} d^2 + a_2 \frac{1440 + 2212 d + 877 d^2 + 88 d^3}{1024\, d} \right] \qquad (15)
$$

Ainsi les Eqs. (14) et (15) dans (13) donnent:

$$
\begin{aligned}
V^{*a} &= \frac{1}{d} \frac{\cancel{\Gamma(d/2)}}{\cancel{\Gamma(\frac{d+1}{2})}} \frac{1}{\cancel{\sqrt{2}}\cancel{\pi^d}} \cancel{\pi^d}\cancel{\sqrt{2}} \frac{\cancel{\Gamma(\frac{d+1}{2})}}{\cancel{\Gamma(d/2)}} \left[\frac{1}{2} + \frac{27}{32} d + \frac{1}{4} d^2 - a_2 \frac{9}{32} \frac{(d+1)(d+3)(d+5)}{d+2} + a_2 \frac{1440 + 2212d + 877d^2 + 88d^3}{1024 d} \right] \\
&= \frac{16 + 27d + 8d^2}{32 d} - a_2 \frac{9 \cdot 32\, (d+1)(d+3)(d+5)}{1024\, d(d+2)} + a_2 \frac{1440 + 2212 d + 877 d^2 + 88 d^3}{1024 d^2} \\
&= \frac{16 + 27d + 8d^2}{32 d} - a_2 \frac{288\, d\, (d^2+4d+3)(d+5)}{1024 d^2 (d+2)} + a_2 \frac{(d+2)(1440 + 2212 d + 877 d^2 + 88 d^3)}{1024 d^2 (d+2)} \\
&= \frac{16 + 27d + 8d^2}{32 d} + a_2 \frac{1}{1024 d^2 (d+2)} \Big[1440 d + 2212 d^2 + 877 d^3 + 88 d^4 + 2880 + 4424 d + 1754 d^2 + 176 d^3 - 288 d (d^3 + 4d^2 + 3d + 5d^2 + 20 d + 15) \Big] \\
&= \frac{16 + 27d + 8d^2}{32 d} + a_2 \frac{1}{1024 d^2 (d+2)} \Big[2880 + 5864 d + 3966 d^2 + 1053 d^3 + 88 d^4 - 288 d (d^3 + 9d^2 + 23 d + 15) \Big] \\
&= \frac{16 + 27d + 8d^2}{32 d} + a_2 \frac{1}{1024 d^2 (d+2)} \Big[2880 + 5864 d + 3966 d^2 + 1053 d^3 + 88 d^4 - 288 d^4 - 2592 d^3 - 6624 d^2 - 4320 d \Big] \\
&= \frac{16 + 27d + 8d^2}{32 d} + a_2 \frac{1}{1024 d^2 (d+2)} \Big[2880 + 1544 d - 2658 d^2 - 1539 d^3 - 200 d^4 \Big]
\end{aligned}
$$

Conclusion: il n'y a pas d'erreur:

$$
\boxed{V_{fc}^{a*} = V_{u}^{a*} = \frac{16 + 27d + 8d^2}{32 d} + a_2 \frac{2880 + 1544 d - 2658 d^2 - 1539 d^3 - 200 d^4}{1024\, d^2 (d+2)}} \qquad (16)
$$